प्रतिशत
(Percentage)

'प्रतिशत' शब्द का मतलब है 'प्रति सैकड़ा'। इसे निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया जा सकता है:

"जिस भिन्न का हर 100 हो, उसे प्रतिशत (percentage)कहते हैं और उस भिन्न का अंश प्रतिशत दर (rate per cent) कहा जाता है।"

निम्नलिखित उदाहरणों के सहारे प्रतिशत एवं उनके भिन्नात्मक मानों को समझा जा सकता है:

1. किसी विद्यार्थी को अंकगणित में 60 प्रतिशत अंक प्राप्त होने का मतलब है कि पूर्णांक 100 में से उसे 60 अंक प्राप्त होते हैं। अर्थात् यदि पूर्णांक 500 है तो उसे गणित में कुल 60 + 60 + 60 + 60 + 60 = 300 अंक प्राप्त हुए। उपर्युक्त पाँच '60' 'प्रत्येक 100 के लिए एक' को इंगित करता है।

   उस विद्यार्थी द्वारा प्राप्त कुल अंकों की गणना दूसरे ढंग से भी की जा सकती है:

   500 का $60\% = \frac{60}{100} \times 500 = 300$

   उपर्युक्त गणना को और भी आसान बनाया जा सकता है यदि भिन्नात्मक मान को उसके रूढ़ रूप में व्यक्त कर दें। प्रस्तुत उदाहरण में,

   $$60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

   यदि हमलोग स्मरण रखें कि $60\% = \frac{3}{5}$ तो हमारी गणना आसान हो जाती है। ऐसी स्थिति

में विद्यार्थी द्वारा प्राप्त कुल अंक $= \frac{3}{5} \times 500 = 300$

2. एक व्यक्ति अपनी आय का 5% शेयर में निवेश करता है। इसका मतलब है कि,

   i) वह अपनी आमदनी के प्रत्येक 100 रु. में से 5 रु. शेयर में निवेश करता है, या

   ii) वह अपनी आमदनी का $\frac{5}{100}$ शेयर में निवेश करता है, या

   iii) वह अपनी आमदनी का $\frac{1}{20}$ शेयर में निवेश करता है।

   अब, यदि उसकी आय 1050 रु. हो तो वह शेयर में कितना निवेश करता है?

   आप तुरंत उत्तर दे सकते हैं, $\frac{1050}{20} = 52.5$ रु.

हमारा सुझाव है कि हर के रूप में 100 लेकर आप कभी आगे न बढ़ें।

3. एक व्यापारी 15 प्रतिशत लाभ कमाता है। इससे तात्पर्य यह है कि यदि वह 100 रु. निवेश करता है तो उसे 15 रु. की आमदनी होती है। पर उसे कितना मुनाफा हुआ होता यदि उसने 900 रु. की पूँजी लगाई होती। यहाँ गणना के लिए उपर्युक्त में से कौन-सा तरीका बेहतर रहेगा? क्या आपको ऐसा नहीं लगता कि यहाँ उस भिन्न के प्रयोग से सुविधा होगी जिसके हर में 100 मौजूद हो! (क्यों ?) क्योंकि 100 एवं 900 के दोनों शून्य एक दूसरे को पूर्णतया विभाज्य बना देते हैं और हमें शीघ्रता से नतीजा प्राप्त हो जाता है:

$$\frac{15}{100} \times 900 = 15 \times 9 = 135$$

(हमें उम्मीद है कि ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिए आपको कुछ लिखना नहीं पड़ेगा।)

4. एक व्यक्ति को अपने वेतन का $33\frac{1}{3}\%$ आय-कर के रूप में देना पड़ता है। यदि उसका वेतन 3516 रु. हो तो उसे कितना आय-कर चुकाना पड़ेगा? इस प्रश्न में आप भिन्न के रूढ़ मान को लेकर आगे बढ़ें:

$$\text{आय-कर} = \frac{3516}{3} = 1172 \text{ रु.}$$

5. एक व्यक्ति अपने वेतन का 12.5% व्यवसाय में निवेश करता है। यदि उसकी वार्षिक आमदनी 50128 रु. हो, तो वह प्रतिवर्ष कितने रुपए व्यवसाय में लगाता है?

$$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \text{ अभीष्ट रुपए} = \frac{1}{8} \times 50128 = 6266 \text{ रु.}$$

अभी तक आपने देखा कि गणना के दौरान प्रतिशत मान का रूढ़ भिन्न (prime fraction) विशेष रूप से प्रयुक्त होता है। इसलिए कुछ महत्वपूर्ण रूढ़ भिन्नों को (जिनका बहुत अधिक इस्तेमाल होता है) याद रखें:

$3\frac{1}{8}\% = \frac{1}{32}$ $\qquad$ $6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$

$5\% = \frac{1}{20}$ $\qquad$ $8\% = \frac{2}{25}$

$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$ $\qquad$ $10\% = \frac{1}{10}$

$12\% = \frac{3}{25}$ $\qquad$ $12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$

$13\frac{1}{3}\% = \frac{2}{15}$ $\quad$ $14\frac{2}{7}\% = \frac{1}{7}$

$15\% = \frac{3}{20}$ $\quad$ $16\% = \frac{4}{25}$

$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$ $\quad$ $20\% = \frac{1}{5}$

$25\% = \frac{1}{4}$ $\quad$ $33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$

$37\frac{1}{2}\% = \frac{3}{8}$ $\quad$ $40\% = \frac{2}{5}$

$60\% = \frac{3}{5}$ $\quad$ $62\frac{1}{2}\% = \frac{5}{8}$

$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$ $\quad$ $75\% = \frac{3}{4}$

$87\frac{1}{2}\% = \frac{7}{8}$

उदा. 1: 625 रु. का 8 प्रतिशत ज्ञात करें।

हल: 625 रु. का $8\% = \frac{2}{25} \times 625 = 50$ रु.

उदा. 2: $12\frac{1}{2}$ प्रतिशत को भिन्न में बदलें।

हल: $12\frac{1}{2}\% = \frac{12\frac{1}{2}}{100} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$

उदा. 3: $\frac{3}{8}$ कितना प्रतिशत के समतुल्य है?

हल: $\frac{3}{8} \times 100 = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}\%$

उदा. 4: $\frac{7}{11}$ कितना प्रतिशत के समतुल्य है? या, $\frac{7}{11}$ को प्रतिशत के रूप में अभिव्यक्त करें।

हल: $\frac{7}{11} \times 100 = \frac{700}{11} = 63\frac{7}{11}\%$

उदा. 5: यदि किसी शहर की जनसंख्या 60000 से बढ़कर 65000 हो गई तो जनसंख्या में कुल कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई?

हल: जनसंख्या में वृद्धि $= 65000 - 60000 = 5000$

$\therefore$ वृद्धि (प्रतिशत में) $= \frac{5000}{60000} \times 100 = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}\%$

उदा. 6: राम का वेतन 630 से बढ़ाकर 700 कर दिया जाता है। बताइए कि वेतन में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई?

हल: वेतन में वृद्धि = (700 – 630) रु. = 70 रु.

$\therefore$ वृद्धि (प्रतिशत में) $= \frac{70}{630} \times 100 = 11\frac{1}{9}\%$

उदा. 7: दो उम्मीदवारों के एक चुनाव में, एक उम्मीदवार को 41% मत मिलता है तथा वह दूसरे उम्मीदवार से 2412 मतों से चुनाव हार जाता है। बताइए कुल मतों की संख्या क्या है?

हल : $(59\% - 41\% =) 18\% \equiv 2412$

$\therefore \quad 100\% \equiv \frac{2412}{18} \times 100 = 13400$

उदा. 8: यदि 8 लिटर चीनी के घोल को जिसमें 5% चीनी है खौलाने पर 2 लिटर पानी वाष्पीकृत होकर उड़ जाता है तो बचे हुए घोल में चीनी का प्रतिशत ज्ञात करें।

हल : चूँकि चीनी घोल से वाष्पीकृत नहीं हो सकता है इसलिए चीनी की मात्रा 8 लिटर मूल घोल में = चीनी की मात्रा बचे हुए घोल यानि (8 – 2 =) 6 लिटर में

$\therefore$ 8 का 5% = 6 का x%

$\therefore \quad x = \frac{5 \times 8}{6} = 6\frac{2}{3}\%$

***द्वितीय विधि* (Second Method):**

चीनी का प्रतिशत (मूल घोल में) = 8 लिटर का 5%

= 0.4 लिटर

2 लिटर पानी वाष्पीकृत होने पर, शेष घोल की मात्रा = (8 – 2 =) 6 लिटर

$\therefore$ चीनी का अभीष्ट प्रतिशत $= \frac{0.4}{6} \times 100$

$= 6\frac{2}{3}\%$

उदा. 9: एक द्रव में 25% दूध है तथा दूसरे द्रव में 30% दूध है। एक केन को पहले द्रव का 6 भाग तथा दूसरे द्रव का 4 भाग से भरा जाता है। दूध का प्रतिशत नए मिश्रण में क्या है?

हल: नये मिश्रण में दूध का अभीष्ट प्रतिशत

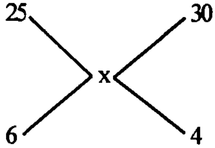
$$= \frac{\text{नए मिश्रण में दुध की मात्रा}}{\text{नए मिश्रण की मात्रा}} \times 100$$

$$= \frac{25\% \text{ दुध का } 6 \text{ भाग} \times 30\% \text{ दुध का } 4 \text{ भाग}}{\text{द्रव का } (6 \text{ भाग} + 4 \text{ भाग})} \times 100$$

$$= \frac{6 \times \frac{25}{100} + 4 \times \frac{30}{100}}{10} \times 100$$

$$= (15 + 12) = 27$$

नोट : मिश्रण* (Alligation) *विधि से भी इस प्रश्न को हल किया जा सकता है।



$$\frac{30 - x}{x - 25} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

या, $60 - 2x = 3x - 75$

या, $5x = 60 + 75$

$\therefore\ x = 27\%$

उदा. *10:* किसी कारखाने में श्रमिकों की कमी की वजह से उसके उत्पादन में 25% की कमी आती है। कार्य-अवधि को कितना प्रतिशत बढ़ाया जाए ताकि उत्पादन पूर्ववत बनी रहे?

हल : उत्पादन में कमी की वजह है केवल श्रमिकों में कमी।

श्रमिको में कमी = 25%

अब, मान लिया कि कार्य अवधि को x% बढ़ा दिया जाता है। ताकि उत्पादन पूर्ववत बनी रहे।

उत्पादन = श्रमिक × कार्य अवधि = M × W (मान लिया)

अब, M × W = (M – M का 25%) × (W + W का x%)

या, $M \times W = \frac{75}{100} M \times \frac{100 + x}{100} W$

या, $100 \times 100 = 75(100 + x)$

या, $\frac{400}{3} = 100 + x \quad \therefore\ x = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\%$

***विधि* II :** गणना को आसान बनाने के लिए, मान लिया कि

श्रमिक = 100 इकाई एवं

कार्य-अवधि = 100 इकाई

पुन: मान लिया कि कार्य-अवधि को x% बढ़ा दिया जाता है।

तो, $(100-25)(100+x) = 100 \times 100$

या, $100 + x = \frac{400}{3} \quad \therefore \quad x = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\%$

***सूत्र विधि* (Direct Formula) :**

कार्य-अवधि में अभीष्ट प्रतिशत वृद्धि $= \frac{25}{100-25} \times 100 = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\%$

एक राशि दूसरे का कितना प्रतिशत है यह ज्ञात करना

उदा. 11: 1.25 रु. 10 रु. का कितना प्रतिशत है? इसे भिन्न के रूप में व्यक्त करें।

हल: भिन्न $= \frac{1.25 \text{ रु.}}{10 \text{ रु.}} = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$

अब, $\frac{1}{8} = \frac{\frac{1}{8} \times 100}{100} = \frac{12\frac{1}{2}}{100} = 12\frac{1}{2}\%$

नोट: उपर्युक्त प्रश्न को प्राय: इस प्रकार लिखा जाता है: "1.25 रु. 10 रु. का कितना प्रतिशत है?"

उदा. 12: 6 पैसे 1 रु. का कितना प्रतिशत है?

हल: अभीष्ट भिन्न $= \frac{6 \text{ पै.}}{1 \text{ रु.}} = \frac{6}{100} = \frac{3}{50} = \frac{\frac{3}{50} \times 100}{100} = 6\%$

उदा. 13: किसी सुनिश्चित रकम का 12%, 43.5 रु. है तो रकम बताइए।

हल: रकम का $\frac{12}{100} = 43\frac{1}{2}$ रु.

$\therefore$ रकम $= \frac{87}{2} \times \frac{100}{12} = 362.50$ रु.

प्रमेय: यदि दो राशियाँ तीसरी राशि से क्रमश: x% एवं y% बड़ी हों तो पहली राशि, दूसरी राशि की $\frac{100+x}{100+y} \times 100\%$ होती है।

प्रमाण: मान लिया कि तीसरी राशि = 100 है।

तो, पहली राशि = 100 + 100 का x% = 100 + x

एवं, दूसरी राशि = 100 + 100 का y% = 100 + y

$\therefore$ पहली राशि दूसरे की $\frac{100+x}{100+y} \times 100\%$ है।

उदा. 14: दो संख्याएँ तीसरी संख्या से क्रमशः 20% एवं 50% बड़ी है। तो पहला दूसरे का कितना प्रतिशत है?

हल: उपर्युक्त प्रमेय के आधार पर अभीष्ट मान $= \frac{120}{150} \times 100 = 80\%$

प्रमेय: यदि A, C का x% हो तथा B, C का y% हो तो A, B का $\frac{x}{y} \times 100\%$ होता है।

प्रमाण: स्वयं प्रयास करें।

उदा. 15: दो संख्याएँ तीसरी संख्या का क्रमशः x% एवं y% है तो पहली संख्या, दूसरी संख्या का कितना प्रतिशत है?

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार, अभीष्ट मान $= \frac{20}{25} \times 100 = 80\%$

नोट: उपर्युक्त गणितीय संबंध बड़े सरल हैं। जब 'पहला दूसरे का क्या है?' पूछा जाए तो पहले को अंश बनाइए एवं दूसरे को हर। इसका विलोम भी उतना ही सत्य है।

उदा. 16: दो संख्याएँ तीसरी संख्या से क्रमशः 30% एवं 40% छोटी हैं तो दूसरी संख्या पहली संख्या का कितना प्रतिशत है?

हल: सर्वप्रथम आप स्वयं सूत्र प्राप्त करने का प्रयास करें। यदि आप ऐसा न कर सकें तो निम्नलिखित सूचनाओं पर ध्यान दें:

1. दो संख्याएँ तीसरी से छोटी है, तथा
2. हमें पहली संख्या की तुलना में दूसरी संख्या का प्रतिशत मान मालूम करना है। इसलिए हमारा सूत्र होना चाहिए,

$$\frac{100-40}{100-30} \times 100 = \frac{60}{70} \times 100 = 85\frac{5}{7}\%$$

उदा. 17: एक धनात्मक संख्या को 5 से गुणा करने के बजाए उस संख्या में 5 से भाग दिया जाता है। प्राप्त परिणाम अभीष्ट सही मान का कितना प्रतिशत है?

हल: मान लिया कि संख्या 1 है तो सही उत्तर = 5

गलत उत्तर जो प्राप्त होता है $= \frac{1}{5}$

$\therefore$ अभीष्ट प्रतिशत $= \frac{1}{5 \times 5} \times 100\% = 4\%$

उदा. 18: एक धनात्मक संख्या में 5 से भाग देने के बजाए गलती से उस संख्या में 5 से गुणा कर दिया जाता है। प्राप्त परिणाम सही उत्तर से कितना प्रतिशत अधिक या कम है?

हल: माना कि संख्या 1 है, तो सही उत्तर $= \frac{1}{5}$

$\therefore$ प्राप्त परिणाम सही उत्तर से $\left(5 - \frac{1}{5}\right) = \frac{24}{5}$ अधिक है।

$$\therefore \text{ अभीष्ट प्रतिशत } = \frac{\frac{25}{5}}{\frac{1}{5}} \times 100 = 2400\%$$

प्रतिशत व्यय एवं बचत

उदा. 19: एक व्यक्ति अपनी आमदनी का $12\frac{1}{2}\%$ खो देता है, तथा शेष का 70% खर्च कर देने के बाद उसके पास 210 रु. बच जाते हैं। उस व्यक्ति के पास प्रारंभ में कितने रुपए थे?

हल: उपर्युक्त प्रश्न को कई विधियों से हल किया जा सकता है। यहाँ हम उनमें से कुछ-एक की चर्चा करेंगे:

I. मान लिया कि प्रारंभ में उसके पास कुल x रु. थे। $12\frac{1}{2}\%$ या $\frac{1}{8}$ खो देने के बाद उसके पास $x - \frac{x}{8} = \frac{7x}{8}$ रु. बच जाते हैं।

70% खर्च करने के बाद उसके पास शेष $\frac{7x}{8}$ का 30% बच जाएगा।

$$\frac{7x}{8} \times \frac{3}{10} = 210$$

$$\therefore x = \frac{210 \times 10 \times 8}{3 \times 7} = 800 \text{ रु.}$$

II. मान लिया कि उसके पास आरंभ में 100 रु. थे। $12\frac{1}{2}$ रु. खोने के बाद उसके पास $87\frac{1}{2}$ रु. बच गए। उसने $87\frac{1}{2}$ का 70% खर्च कर दिया। इसलिए उसके पास ($87\frac{1}{2}$ का 30%) या $\frac{105}{4}$ रु. बच जाएँगे। लेकिन उसके पास 210 रु. बच गए हैं। इसलिए हमें निम्नलिखित समानुपातिक संबंध प्राप्त होता है:

$\frac{105}{4}$ रु. : 210 रु. :: 100 रु. : अभीष्ट रु. (रूल ऑफ थ्री से)

$$\therefore \text{ अभीष्ट रु. } = \frac{4 \times 210 \times 100}{105} \text{ रु. } = 800 \text{ रु.}$$

III. ***द्रुत विधि* (Quicker Method)*:*** यह विधि न केवल संक्षिप्त है बल्कि गणना की दृष्टि से सरल एवं त्वरित भी। केवल सूत्र को सही ढंग से याद रखें।

प्रारंभ में उसके पास कुल रुपए $= \dfrac{210 \times 100 \times 100}{(100-12.5)(100-70)}$

$$= \frac{210 \times 100 \times 100}{87.5 \times 30} = 800 \text{ रु.}$$

नोट: चूँकि प्रारंभ में जितने रु. थे, वे निश्चय ही शेष बचे रुपयों से कहीं अधिक होंगे। इसलिए आपको बड़ी संख्या 100 को अंश एवं छोटी संख्या (100 – 12.5), या (100 – 70) को हर की जगह रखने में कोई दुविधा नहीं होनी चाहिए।

उदा. 20: आय का 3.5% कर के रूप में ले लिया जाता है तथा शेष का 12.5% बचाया जाता है। ऐसा करने के बाद खर्च करने के लिए 4053 रु. बच जाते हैं। आय कितनी है?

हल: द्रुत विधि से जो परिणाम प्राप्त होता है, वह कुछ इस प्रकार है,

आय $= \dfrac{4053 \times 100 \times 100}{(100-3.5)(100-12.5)} = 4800$ रु.

इस प्रकार हमें एक सामान्य-सूत्र प्राप्त होता है, जिसे निम्नलिखित प्रमेय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

प्रमेय: यदि किसी राशि का x% पहले व्यक्ति ने ले लिया हो, शेष का y% दूसरे व्यक्ति ने लिया हो तथा जो शेष बचे उसका z% तीसरे व्यक्ति द्वारा लेने के उपरान्त यदि A राशि बच जाए

तो आरंभ में कुल राशि $\dfrac{A \times 100 \times 100 \times 100}{(100-x)(100-y)(100-z)}$ रही होगी।

प्रमाण: आरंभिक राशि निश्चित रूप से A से अधिक होगी, इसलिए भिन्न के नियम से, A में ऐसे भिन्नों से गुणा करना होगा, जिसका मान 1 से अधिक है। समस्या है ऐसे भिन्नों को प्राप्त करने की। चूँकि हर चरण में राशि में कमी होती जाती है इसलिए हमारे भिन्न में 100 के अतिरिक्त (100 – x), (100 – y), एवं (100 – z) भी शामिल होने चाहिए। इस प्रकार, वे भिन्न, जिनका मान 1 से अधिक हो तथा जिनसे A में गुणा किया जाता है, वे इस प्रकार हैं:

$$\frac{100}{100-x}, \frac{100}{100-y} \text{ एवं } \frac{100}{100-z}$$

$\therefore$ अभीष्ट आरंभिक राशि $= A\left(\dfrac{100}{100-x}\right)\left(\dfrac{100}{100-y}\right)\left(\dfrac{100}{100-z}\right)$

प्रमेय: यदि किसी राशि में उसका x% जोड़ दिया जाए, इस बढ़ी हुई राशि में फिर इसका y% जोड़ दिया जाए तथा फिर जो राशि प्राप्त हो उसमें उसका z प्रतिशत जोड़ दिया जाए और इस प्रकार जो राशि प्राप्त हो उसे A से सूचित किया जाए तो आरंभिक राशि

$$= \frac{A \times 100 \times 100 \times 100}{(100+x)(100+y)(100+z)}$$

प्रमाण: आरंभिक राशि निश्चय ही अंतिम राशि 'A' से कम होनी चाहिए। इसलिए 'भिन्न के नियम' के अनुसार A में ऐसे भिन्नों से गुणा करना होगा जिनका मान 1 से कम हो। चूँकि प्रत्येक चरण में राशि में वृद्धि होती जाती है, इसलिए 100 के अतिरिक्त (100 + x), (100 + y) एवं (100 + z) जैसे भिन्न भी प्राप्त होते हैं। इस प्रकार 1 से कम मान वाले वे भिन्न जिनसे हमें A में गुणा करना है, निम्नलिखित हैं :

$$\frac{100}{100+x}, \frac{100}{100+y} \text{ एवं } \frac{100}{100+z}$$

$$\therefore \text{ अभीष्ट आरंभिक राशि } = A\left(\frac{100}{100+x}\right)\left(\frac{100}{100+y}\right)\left(\frac{100}{100+z}\right)$$

उपर्युक्त प्रमेयों पर आधारित कुछ और उदाहरण

उदा. 21: किसी राशि में से 10 प्रतिशत घटाने के बाद जो शेष बचता है, उसका 20 प्रतिशत फिर उसमें से घटा लिया जाता है। इसके बाद 3600 रु. बच जाते हैं तो मूल राशि क्या है?

हल: निश्चय ही मूल राशि 3600 से अधिक होगी इसलिए इसमें $\frac{100}{(100-10)}$ एवं $\frac{100}{(100-20)}$ से गुणा करना होगा।

$$\therefore \text{ अभीष्ट राशि } = \frac{3600\times100\times100}{90\times80} = 5000 \text{ रु.}$$

उदा. 22: दो वर्ष पूर्व किसी व्यक्ति के लॉकर में 4800 रु. थे। पहले वर्ष में उसने इसका 20% उसमें जमा किया। दूसरे वर्ष में उसने लॉकर में बढ़ी हुई राशि का 25% जमा किया। इस समय लॉकर में कितने रु. हैं?

हल: निश्चय ही अभीष्ट राशि 4800 रु. से अधिक है। एवं प्रत्येक वर्ष रकम में कुछ बढ़त होती है। इसलिए इस राशि में $\left(\frac{100+20}{100}\right)$ एवं $\left(\frac{100+25}{100}\right)$ से गुणा किया जाना चाहिए।

$$\therefore \text{ अभीष्ट राशि } = \frac{4800\times120\times125}{100\times100} = 7200 \text{ रु.}$$

नोट: उपर्युक्त उदाहरण दूसरे उदाहरणों से अलग है। इस पर ध्यान दें।

जनसंख्या से संबंधित सूत्र

उदा. 23: यदि किसी शहर की मूल जनसंख्या P हो एवं यह r% प्रति वर्ष की दर से बढ़ रही हो तो n वर्षों के बाद जनसंख्या कितनी होगी?

हल: $1 \text{ साल के बाद जनसंख्या } = P + \frac{Pr}{100} = P\left[1+\frac{r}{100}\right]$

इसका मतलब यह है कि एक वर्ष के दौरान, वर्ष के प्रारंभ की जनसंख्या (P) $\left[1+\frac{r}{100}\right]$ से गुणित हो जाती है। अब, दूसरे साल के आरंभ में जनसंख्या = $P\left(1+\frac{r}{100}\right)$

$\therefore$ 2 वर्षों में जनसंख्या = $P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$

$\therefore$ n वर्षों में जनसंख्या = $P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

नोट: यदि जनसंख्या में प्रतिवर्ष r% की दर से कमी होने लगे तो n वर्ष के बाद जनसंख्या

$$= P\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$$

उदा. 24: यदि किसी शहर की जनसंख्या 4% प्रति वर्ष की दर से बढ़ रही हो तथा लोगों की वर्तमान संख्या 15625 हो तो 3 वर्ष बाद जनसंख्या क्या होगी?

हल: अभीष्ट जनसंख्या $= 15625\left(1+\frac{4}{100}\right)^3$

$$= 15625 \times \frac{26}{25} \times \frac{26}{25} \times \frac{26}{25} = 17576$$

उदा. 25: यदि किसी शहर की जनसंख्या 4% प्रतिवर्ष की दर से बढ़ रही हो तथा इस समय जनसंख्या 17576 हो तो 3 वर्ष पूर्व जनसंख्या कितनी थी?

हल: 3 वर्ष पूर्व की जनसंख्या $\times \left(\frac{26}{25}\right)^3$ = वर्तमान जनसंख्या

$\therefore$ 3 वर्ष पूर्व की जनसंख्या $= \frac{17576 \times 25 \times 25 \times 25}{26 \times 26 \times 26} = 15625$

नोट: उदा.-24. एवं उदा.-25 के सहारे भिन्नों के कमाल को देखा जा सकता है। उदा.-24 में अभीष्ट जनसंख्या निश्चय ही प्रदत्त जनसंख्या से बड़ी थी, इसलिए हमने बड़ी संख्या (26) को अंश बनाया एवं छोटी संख्या (25) को हर। उदा.-25 में ठीक इसका उल्टा किया गया है।

जब अलग-अलग वर्षों में अलग-अलग रफ्तार से वृद्धि हुई हो

प्रमेय: यदि किसी शहर की जनसंख्या P पहले वर्ष में x% की रफ्तार से बढ़े, दूसरे वर्ष में y% की रफ्तार से बढ़े एवं तीसरे वर्ष में z% की रफ्तार से बढ़े तो तीसरे वर्ष के अन्त में जनसंख्या

$$= \frac{P \times (100+x)(100+y)(100+z)}{100 \times 100 \times 100}$$

प्रमाण: भिन्न के नियम के अनुसार P में किसी ऐसे भिन्न से गुणा करना होगा जिसका मान 1 से अधिक हो।

$$\therefore \text{ 3 वर्ष बाद जनसंख्या } = P\left(\frac{100+x}{100}\right)\left(\frac{100+y}{100}\right)\left(\frac{100+z}{100}\right)$$

नोट: क्या आपने ध्यान दिया कि गुणक भिन्न $\left(\frac{100+x}{100}\right)$ है न कि $\left(\frac{100}{100-x}\right)$ क्यों?

क्योंकि जनसंख्या में x% प्रति वर्ष की दर से वृद्धि होती है, इसलिए हमारे पास दो राशियाँ हैं 100 एवं (100 + x) और चूँकि एक वर्ष बाद जनसंख्या P से निश्चय ही अधिक होगी, इसलिए हमलोग P में $\frac{100+x}{100}$ से गुणा करते हैं। बाकि वर्षों के लिए भी हम इसी प्रकार की गणना करते हैं।

उदा. 26: किसी शहर की जनसंख्या 8000 है। पहले वर्ष में यह 10 प्रतिशत की दर से बढ़ती है तथा दूसरे वर्ष में 20% की दर से वृद्धि होती है। दो वर्ष बाद जनसंख्या क्या होगी?

हल: अभीष्ट जनसंख्या $= \frac{8000 \times 110 \times 120}{100 \times 100} = 10560$

यदि जनसंख्या पहले वर्ष में बढ़ती हो एवं फिर दूसरे वर्ष में घट जाती हो

प्रमेय: उपर्युक्त प्रमेय में यदि दूसरे वर्ष में जनसंख्या y% घट जाए तथा पहले एवं तीसरे वर्ष में वैसी ही वृद्धि हुई हो तो, तीसरे वर्ष के अंत में जनसंख्या $= \frac{P(100+x)(100-y)(100+z)}{100 \times 100 \times 100}$

प्रमाण: स्वयं प्रयास करें।

उदा. 27: किसी शहर की जनसंख्या 10,000 है। पहले वर्ष में इसमें 10% की वृद्धि हुई। दूसरे वर्ष में यह 20% घट गई तथा तीसरे वर्ष इसमें फिर से 30% की वृद्धि हुई। 3 वर्ष बाद जनसंख्या कितनी होगी?

हल: अभीष्ट जनसंख्या $= \frac{10000 \times 110 \times 80 \times 130}{100 \times 100 \times 100} = 11440$

उदा. 28: किसी स्थान की जनसंख्या पहले वर्ष में 5 प्रतिशत बढ़ जाती है तथा अगले वर्ष 5 प्रतिशत कम हो जाती है। यदि दूसरे वर्ष के अंत में जनसंख्या 7980 हो, तो पहले वर्ष के आरंभ में जनसंख्या कितनी थी?

हल: अभीष्ट जनसंख्या $= 7980 \times \left(\frac{100}{100-5}\right)\left(\frac{100}{100+5}\right)$

$$= \frac{7980 \times 100 \times 100}{95 \times 105} = 8000$$

नोट: उपर्युक्त उदाहरण में दो वर्षों के बाद की जनसंख्या दी हुई है तथा प्रथम वर्ष के आरंभ में कितनी जनसंख्या थी, यह पूछा गया है। यही कारण है कि भिन्नों को उलट दिया गया है। इस बात को ध्यान में रखें। अगले उदाहरण में भी यही दिखाया गया है।

उदा. 29: किसी शहर की जनसंख्या पहले वर्ष में 10% की दर से बढ़ती है तथा दूसरे वर्ष में यह 10% प्रतिवर्ष की दर से कम हो जाती है। यदि इस समय शहर में कुल 29700 लोग रह रहे हों तो 2 वर्ष पूर्व जनसंख्या कितनी थी?

हल: अभीष्ट जनसंख्या $= \dfrac{29700\times100\times100}{(100-10)\times(100+10)}$

$$= \frac{29700\times100\times100}{90\times110} = 33000$$

उदा. 30: किसी शहर की जनसंख्या 8000 है। यदि पुरुषों की संख्या 6 प्रतिशत की दर से बढ़े एवं महिलाओं की संख्या में वृद्धि की रफ्तार 10 प्रतिशत हो तो जनसंख्या 8600 हो जाएगी। शहर में महिलाओं की संख्या ज्ञात करें।

हल: मान लिया कि महिलाओं की संख्या $= x$

तो x का $110\% + (8000-x)$ का $106\% = 8600$

या, $\dfrac{110x}{100} + \dfrac{106(8000-x)}{100} = 8600$

या, $x(110-106) = 8600\times100 - 8000\times106$

$\therefore\ x = \dfrac{8600\times100-8000\times106}{110-106} = \dfrac{12000}{4} = 3000$

नोट: यदि हम बीच के (intermediate) चरणों को नजरंदाज कर दें तो महिलाओं एवं पुरुषों की जनसंख्या निम्नलिखित प्रकार से सीधे भी निकाली जा सकती है:

महिलाओं की जनसंख्या $= \dfrac{8600\times100-8000(100+6)}{10-6} = 3000$

पुरुषों की जनसंख्या $= \dfrac{8600\times100-8000(100+10)}{6-10} = \dfrac{20000}{4} = 5000$

***मिश्रण-विधि से* (By Method of Alligation):**

औसत प्रतिशत वृद्धि $= \dfrac{600}{8000}\times100 = \dfrac{15}{2} = 7.5\%$

अब, पुरुष महिलाएँ

6% 10%

7.5%

2.5 1.5

$\therefore$ पुरुष : महिला $= 2.5 : 1.5 = 5:3$

$\therefore$ महिलाओं की संख्या $= \frac{8000}{5+3} \times 3 = 3000$

उपभोग में ह्रास (Reduction in Consumption)

उदा. 31: यदि किसी वस्तु के मूल्य में 20% की वृद्धि होती हो तो उस वस्तु की खपत कितना प्रतिशत कम की जाए ताकि खर्च बिल्कुल न बढ़ाना पड़े?

हल: **I.** मान लिया कि मूल्य एवं खपत दोनों 100 इकाई हैं।

प्रश्नानुसार, प्रारंभ में व्यय $= (100 \times 100)$ रु.

नया मूल्य = 120 इकाई

मान लें कि व्यय को पूर्ववत रखने के लिए वह खपत में x% की कटौती करता है। तो उसका कुल व्यय $= [120 \times (100 - x)]$ रु.

प्रश्नानुसार, $100 \times 100 = 120(100 - x)$

या, $120x = 120 \times 100 - 100 \times 100$

या, $x = \frac{100(120-100)}{120} = 16\frac{2}{3}\%$

II. बढ़ा हुआ मूल्य = पुराने मूल्य का $\frac{120}{100}$

$\therefore$ खपत = मूल मात्रा का $\frac{100}{120}$ $\left[\frac{120}{100} \text{ का व्युत्क्रम}\right]$

$\therefore$ खपत में कमी = मूल खपत का $\left(1 - \frac{100}{120}\right)$

= मूल खपत का $\frac{1}{6} = 16\frac{2}{3}\%$

III. ***द्रुत विधि*** **(Quicker Method):**

प्रमेय: यदि किसी वस्तु की कीमत में r% की वृद्धि हो तो खपत में $\left(\frac{r}{100+r} \times 100\right)\%$ की कटौती करने से खर्च बराबर बना रहेगा।

प्रमाण: सूत्र को $\left(r \times \frac{100}{100+r}\right)$ के रूप में लिखा जा सकता है। यदि आप ध्यानपूर्वक देखें तो पाएँगे कि भिन्न $\frac{100}{100+r}$ का मान 1 से कम है (क्योंकि अंश हर से कम है)। क्यों? क्योंकि इस स्थिति में हमारा अभीष्ट मान प्रदत्त मान (20%) से कम है। इस प्रकार इस स्थिति में भी, भिन्न के नियम का प्रयोग किया गया है।

इस प्रकार,

अभीष्ट उत्तर $= \frac{20}{100+20} \times 100 = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}\%$

उदा. 32: यदि चीनी की कीमत 10% गिर जाती हो तो कोई गृहपति अपनी खपत कितना बढ़ा दे ताकि उसके खर्च में कोई कमी नहीं आए।

हल: यह प्रश्न, उदा.-31 के अनुरूप है। उदा.- 31 के संदर्भ में प्रयुक्त तीनों विधियों से भी इसे हल किया जा सकता है। लेकिन हमलोग यहाँ केवल तीसरी विधि का इस्तेमाल करेंगे। अन्य दोनों विधियों के सहारे खुद ही हल करने का प्रयत्न करें।

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

प्रमेय: यदि किसी वस्तु का मूल्य r% कम हो जाता हो तो खपत में $\left[\frac{r}{(100-r)} \times 100\right]\%$ की वृद्धि करने से उस वस्तु पर किया जानेवाला व्यय समान बना रहता है।

प्रमाण: यदि हम सूत्र को $r \times \frac{100}{(100-r)}$ के रूप में लिखें तो पाते हैं कि भिन्नात्मक मान $\left[\frac{100}{100-r}\right]$, 1 से बड़ा है। क्यों? (इसका उत्तर स्वयं ढूँढ़े)।

इसलिए, इस स्थिति में,

अभीष्ट उत्तर $= \frac{10}{(100-10)} \times 100 = 11\frac{1}{9}\%$

प्रतिशत संबंध (Percentage Relationship)

यदि पहला मान दूसरे मान से r प्रतिशत अधिक हो, तो दूसरा मान पहले मान से $\left(\frac{r}{100+r} \times 100\right)\%$ कम होगा।

प्रमाण: भिन्न के नियम से, r में ऐसे भिन्न से गुणा किया जाना चाहिए, जिसका मान 1 से कम हो। यह अभीष्ट भिन्न है: $\frac{r}{100+r}$.

साधारण गणितीय गणना की विधि

मान लिया कि दूसरा मान 100 है।

$\therefore$ पहला मान $= (100+r)$

अब चूँकि, जब पहला मान (100 + r) है तो दूसरा पहले मान से r कम है।

$\therefore$ जब पहला मान 100 है तो दूसरा पहले मान से $\left[\frac{r}{100+r} \times 100\right]$ कम है।

$\therefore$ दूसरा मान पहले की तुलना में $\left[\frac{r}{100+r}\times 100\right]\%$ कम है।

प्रमेय: यदि पहलो मान दूसरे मान से r प्रतिशत कम हो तो दूसरा मान पहले मान से $\left[\frac{r}{100-r}\times 100\right]\%$ अधिक होता है।

प्रमाण: स्वयं कोशिश करें।

उदा. 33: यदि A का वेतन B से 25% अधिक हो तो B का वेतन A से कितना प्रतिशत कम है?

हल: **I.** मान लिया कि B का वेतन 100 रु. प्रति माह है। तब A का वेतन 125 रु. प्रति माह होगा।

अब चुँकि जब A का वेतन 125 है तो B, 25 कम है।

$\therefore$ जब A का वेतन 100 हो तो B, $\frac{25}{125}\times 100$ कम है। या, 20 रु. कम है।

अर्थात् B का वेतन A से 20% कम है।

II. *द्रुत विधि* (Quicker Method):

यदि A की आय B की आय से r% अधिक हो तो B की आय A की तुलना में $\left(\frac{r}{100+r}\times 100\right)\%$ कम होगा।

प्रदत्त प्रश्न में,

$$\text{अभीष्ट उत्तर} = \frac{25}{100+25}\times 100\% = 20\%$$

नोट: क्या आपने उदा.-32 में प्रयुक्त सूत्र एवं इस सूत्र मे कोई समानता देखी?

उदा. 34: यदि A का वेतन B के वेतन से 30% कम हो तो B का वेतन A से कितना अधिक होगा?

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

यदि A का वेतन B से r प्रतिशत कम हो तो B का वेतन A की तुलना में $\left(\frac{r}{100-r}\times 100\right)\%$ अधिक होगा।

$\therefore$ प्रस्तुत प्रश्न में, अभीष्ट उत्तर $= \frac{30}{100-30}\times 100 = 42\frac{6}{7}\%$

नोट: उदा.-32 एवं उदा.-34 में आपको कोई एकरूपता दिखी?

उदा. 35: एक संख्या दूसरी से 50% अधिक है तो, दूसरी संख्या पहली संख्या से कितना प्रतिशत कम है?

हल: पिछले प्रश्न में जिस सूत्र की चर्चा की गई उसका यहाँ भी उपयोग किया जा सकता है।

उस सूत्र के अनुसार दूसरी संख्या पहली संख्या से $\left[\frac{50}{100+50}\times 100\right]\% = 33\frac{1}{3}\%$ कम होगी।

उदा. 36: एक संख्या दूसरी से 20% कम है तो दूसरी संख्या पहली से कितना प्रतिशत अधिक है?

हल: उदा.-32 एवं उदा.-34 में दिए गए सूत्र का इस्तेमाल करें।

किसी राशि को दूसरी राशि के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करना

उदा. 37: 20 को 80 के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करें।

हल: यदि पहली राशि 80 है तो दूसरी 20 है।

$\therefore$ यदि पहली राशि 100 है तो दूसरी $\frac{20}{80}\times 100 = 25$

$\therefore$ 20, 80 का 25% है।

इस प्रकार, बिना विस्तार में गए हुए, हम कह सकते हैं कि x, y के प्रतिशत के रूप में,

$\left[\frac{x}{y}\times 100\right]\%$ है।

उदा. 38: 250 को 50 के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करें।

हल: अभीष्ट प्रतिशत $= \frac{250}{50}\times 100 = 500\%$

उदा. 39: 160 को 120 के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करें।

हल: अभीष्ट प्रतिशत $= \frac{160}{120}\times 100 = \frac{400}{3} = 133\frac{1}{3}\%$

उदा. 40: 20 को '200 के प्रति हजार' के रूप में व्यक्त करें।

हल: अभीष्ट उत्तर $= \frac{20}{200}\times 1000 = 100$ प्रति हजार

जब शुरू में वृद्धि हो एवं बाद में ह्रास हो

उदा. 41: किसी श्रमिक के वेतन में आरंभ में 10% की वृद्धि होती है एवं फिर इसमें 10 प्रतिशत की कमी आ जाती है। वेतन में कुल मिलाकर कितना फर्क आया?

हल: मान लिया कि श्रमिक का वेतन 100 रुपए था।

वृद्धि के उपरान्त वेतन = 100 + 100 का 10% = 110 रु.

वेतन में कटौती के बाद, वेतन = 110 – 110 का 10% = 99 रु.

$\therefore$ प्रतिशत परिवर्तन $= 100 - 99 = 1\%$

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

प्रमेय: यदि किसी संख्या में आरंभ में x% की वृद्धि होती हो एवं फिर x% की कमी हो तो कुल

मिलाकर उस संख्या का मान कम हो जाता है और यह कमी x का x% अर्थात् $\frac{x^2}{100}$ के बराबर होता है।

प्रमाण: मान लिया कि संख्या = A

यदि इसमें x% की वृद्धि हो तो यह

$A + A$ का $x\% = A + \frac{Ax}{100} = \frac{A(100+x)}{100}$ हो जाता है।

जब इस बढ़े हुए मान में x% की कमी आती है तो यह

$\left\{\frac{A(100+x)}{100} - \frac{A(100+x)}{100} \text{ का } x\%\right\}$ हो जाता है।

$$= \frac{A(100+x)}{100} - \frac{Ax(100+x)}{100\times100}$$

$$= \frac{100A(100+x) - Ax(100+x)}{100\times100}$$

$$= \frac{[A(100+x)][100-x]}{100\times100} = \frac{A(100+x)(100-x)}{100\times100}$$

$$= \frac{\left|A(100)^2 - x^2\right|}{(100)^2}$$

$$\therefore \text{ कुल परिवर्तन} = \frac{A\left|(100)^2 - x^2\right|}{[100]^2} - A = \frac{-Ax^2}{(100)^2}$$

$$\therefore \text{ प्रतिशत परिवर्तन} = \frac{-Ax^2\times100}{(100)^2\times A} = \frac{-x^2}{100}\%$$

इस प्रकार, आपने देखा कि कुल मिलाकर संख्या के मान में कमी आती है (क्योंकि चिह्न ऋणात्मक है) और यह कमी $\frac{x^2}{100}\%$ के रूप में व्यक्त की जा सकती है। उपर्युक्त उदाहरण में, ह्रास (प्रतिशत में) $= \frac{10^2}{100} = 1\%$

उदा. 42: एक दुकानदार अपने सामान का दाम 12% बढ़ाकर रखता है। इसके बाद वह 12% की छूट भी देता है। कुल मिलाकर उसे हानि होती है या लाभ? इसे प्रतिशत में व्यक्त करें।

हल: ऐसी स्थिति में हमेशा हानि ही होती है और इस हानि का प्रतिशत है $\frac{(12)^2}{100} = 1.44\%$

उदा. 43: यदि किसी शहर की जनसंख्या पहले वर्ष में 15% बढ़ जाती हो एवं दूसरे वर्ष में 15% घट जाती हो तो कुल मिलाकर जनसंख्या में कितना परिवर्तन आता है?

हल: जनसंख्या में कुल मिलाकर कमी आती है और यह कमी $\frac{(15)^2}{100}\% = 2.25\%$ के बराबर है।

यदि दोनों मान अलग-अलग हों

प्रमेय: यदि किसी संख्या का मान शुरू में x% बढ़ जाता हो एवं फिर इसमें y% की कमी आती हो तो उसमें कुल मिलाकर $\left[x - y - \frac{xy}{100}\right]\%$ की वृद्धि या कमी आती है। यदि वृद्धि हो तो चिह्न धनात्मक होता है अन्यथा चिह्न ऋणात्मक होता है।

प्रमाण: मान लिया कि संख्या A है।

x% वृद्धि के बाद इसका मान

$A + A$ का $x\% = A + \frac{Ax}{100} = \frac{A(x+100)}{100}$ हो जाता है।

जब इस बढ़े हुए मान में y% की कमी आ जाती है तो परिवर्तित मान

$$= \frac{A(x+100)}{100} - \frac{A(x+100)}{100} \text{ का } y\%$$

$$= \frac{A(x+100)}{100} - \frac{Ay(x+100)}{(100)^2}$$

$$= \frac{A(x+100)(100-y)}{(100)^2}$$

कुल परिवर्तन $= \frac{A(x+100)(100-y)}{(100)^2} - A$

$$= \frac{A\{(100)^2 + 100x - 100y - xy\} - (100)^2 A}{(100)^2}$$

$$= \frac{A\{100x - 100y - xy\}}{(100)^2}$$

$\therefore$ परिवर्तन (प्रतिशत में) $= \frac{A\{100x - 100y - xy\}}{(100)^2} \times \frac{100}{A}$

$$= \left[x - y - \frac{xy}{100}\right]\%$$

प्रमेय: यदि वृद्धि एवं ह्रास का क्रम बदल दिया जाए तब भी परिणाम अपरिवर्तित रहता है।

प्रमाण: स्वयं कोशिश करें।

उपर्युक्त दोनों प्रमेयों को सम्मिलित करके निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

कुल परिवर्तन = प्रतिशत वृद्धि - प्रतिशत ह्रास- $\frac{(\%\ \text{वृद्धि})\times(\%\ \text{ह्रास})}{100}$

उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग आपकी कठिनाइयों को दूर कर देगा।

उदा. 44: एक श्रमिक का वेतन आरंभ में 10 प्रतिशत बढ़ा दिया जाता है तथा बाद में 5% कम कर दिया जाता है, तो उसके वेतन में कितने का फर्क आया?

हल: मान लिया कि श्रमिक का वेतन 100 रु. था।

वेतन में 10% वृद्धि के बाद बढ़ा हुआ वेतन = 100 + 100 का 10% = 110 रु.

वेतन में कमी के बाद घटा हुआ वेतन = 110 – 110 का 5% = 104.5 रु.

प्रतिशत वृद्धि = 104.5 – 100 = 4.5%

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार,

यदि किसी संख्या को पहले x% बढ़ा दिया जाता हो तथा फिर उसमें y% की कमी आ जाती हो तो कुल मिलाकर उसमें $\left(x-y-\frac{xy}{100}\right)\%$ की वृद्धि या ह्रास होता है और यह परिवर्तन क्रमशः धनात्मक या ऋणात्मक चिह्न से अभिव्यक्त होता है।

उपर्युक्त प्रश्न में कुल परिवर्तन $= 10-5-\frac{10\times5}{100} = 4.5\%$

$\therefore$ चिह्न धनात्मक (+) है, इसलिए 4.5% की वृद्धि हुई।

उदा. 45: एक दुकानदार अपने वस्तुओं की कीमत मूल कीमत से 20% बढ़ा कर लिखता है। इसके बाद वह हर खरीददार को 10% की छूट देता है। उसे कितना प्रतिशत लाभ या हानि हुआ?

हल: ***प्रमेय से:***

$$20-10-\frac{20\times10}{100} = 8\%$$

$\because$ चिह्न धनात्मक (+) है, इसलिए उसे 8% का मुनाफा हुआ।

उदा. 46: यदि किसी श्रमिक का वेतन पहले 20 प्रतिशत घटा दिया जाता हो तथा फिर 10 प्रतिशत बढ़ा दिया जाता हो तो वेतन पर कितना प्रतिशत प्रभाव पड़ा?

हल: ***द्रुत विधि से:***

$$\%\ \text{प्रभाव} = \%\ \text{वृद्धि} - \%\ \text{कमी} - \frac{(\%\ \text{वृद्धि})\times(\%\ \text{कमी})}{100}$$

$$= 10-20-\frac{10\times20}{100} = -12\%$$

इस प्रकार उसके वेतन में 12% की कमी आई क्योंकि चिह्न ऋणात्मक है।

नोट: वृद्धि एवं कमी के क्रम में परिवर्तन का मतलब है कि उपर्युक्त उदाहरण में, सर्वप्रथम 10% बढ़ाया जाता है और फिर 20%घटाया जाता है। दोनों ही स्थितियों में समान परिणाम प्राप्त होता है।

उदा. 47: 1988 में किसी शहर की जनसंख्या 12% कम हो गई। 1989 में इसमें 15% की वृद्धि हुई। 1990 के आरंभ में शहर की जनसंख्या पर कुल मिलाकर कितना प्रभाव पड़ा था।

हल: $$\% \text{ प्रभाव} = \% \text{ वृद्धि} - \% \text{ ह्रास} - \frac{(\% \text{ वृद्धि})(\% \text{ ह्रास})}{100}$$

$$= 15 - 12 - \frac{15 \times 12}{100} = 15 - 13.8 = 1.2$$

$\therefore$ जनसंख्या में 1.2% की वृद्धि हुई।

क्रमागत वृद्धि या ह्रास (Successive Increase or Decrease)

प्रमेय: यदि किसी संख्या का मान पहले x% एवं फिर y% बढ़ा दिया जाता हो तो कुल मिलाकर

$$\left(x + y + \frac{xy}{100}\right)\%$$ की वृद्धि होती है।

प्रमाण: पिछले सूत्र में यदि y की जगह (–y) रख दिया जाए तो हमें अभीष्ट परिणाम मिल जाता है। ऐसा इसलिए कि, हम ऐसा कह सकते हैं कि

वृद्धि = – ह्रास

उदा. 48: एक दुकानदार अपने वस्तुओं की कीमत वास्तविक मूल्य से 15% बढ़ा कर रखता है। मांग में वृद्धि के कारण वह एक बार फिर मूल्य में 10 प्रतिशत की वृद्धि करता है। उसे कितना प्रतिशत मुनाफा होगा?

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार,

$$\% \text{ मुनाफा} = 15 + 10 + \frac{15 \times 10}{100} = 26.5\%$$

उदा. 49: किसी शहर की जनसंख्या लगातार दो वर्षों तक घटती रही। पहले वर्ष में इसमें 10% की कमी आई एवं दूसरे वर्ष में 20% की। दो वर्षों बाद जनसंख्या में कुल कितने प्रतिशत की कमी आई?

हल: x = –10 एवं y = -20 रखने पर,

$$-10 - 20 - \frac{(-10)(20)}{100} = -28\%$$

$\therefore$ जनसंख्या में 28% की कमी आई।

राजस्व पर प्रभाव

प्रमेय: i) यदि किसी वस्तु की कीमत x% घटा दी जाए एवं उसकी खपत में y% की वृद्धि हो, या

ii) यदि वस्तु की कीमत x% बढ़ा दी जाए एवं उसकी खपत में y% की कमी हो तो राजस्व पर प्रभाव

$$= \text{मान में \% वृद्धि} - \text{मान में \% ह्रास} - \frac{\text{प्रतिशत वृद्धि} \times \text{प्रतिशत ह्रास}}{100}$$

एवं मान में ऋण एवं धन चिह्न के अनुरूप क्रमशः ह्रास एवं वृद्धि होती है।

नोट: उपर्युक्त सूत्र स्थिति (i) एवं (ii) के लिए एक सामान्य सूत्र है। अलग-अलग इसके निम्नलिखित रूप हैं:

स्थिति* (i) *के लिए:

$$y - x - \frac{yx}{100}$$

स्थिति* (ii) *के लिए:

$$x - y - \frac{xy}{100}$$

इस प्रकार, यह स्पष्ट है कि दोनों ही स्थितियों के लिए समान रूप से उपयोगी सामान्य सूत्र को स्मरण रखना कहीं अधिक आसान है।

प्रमाण: स्थिति (i) के संदर्भ में:

मान लिया कि वस्तु का मूल्य A प्रति इकाई है तथा उसकी खपत B इकाई है।

कुल राजस्व व्यय = AB रु.

नया मूल्य = A − A का x%

$$= A - \frac{Ax}{100} = \frac{A(100-x)}{100}$$

एवं नई खपत = B + B का y% $= B + \frac{By}{100} = \frac{B(100+y)}{100}$

$$\therefore \text{ नया राजस्व व्यय } = \frac{A(100-x)}{100} \times \frac{B(100+y)}{100}$$

$$= \frac{AB(100-x)(100+y)}{100 \times 100}$$

$$\therefore \text{ राजस्व व्यय में परिवर्तन } = \frac{AB(100-x)(100+y)}{100 \times 100} - AB$$

$$= \frac{AB\left(100^2 + 100y - 100x - xy\right) - 100^2 AB}{100^2}$$

$$= \frac{AB\{100y - 100x - xy\}}{100^2}$$

$\therefore$ राजस्व पर पड़ने वाला प्रतिशत प्रभाव $= \frac{AB\{100y - 100x - xy\}}{100^2} \times \frac{100}{AB}$

$$= y - x - \frac{xy}{100}$$

इसी तरह स्थिति (ii) के लिए भी सूत्र को प्रमाणित किया जा सकता है।

उदा. 50: किसी वस्तु पर लगाए जाने वाले कर में 20% की कमी की जाती है एवं इसकी खपत में 15% की वृद्धि होती है। राजस्व पर कितना प्रभाव पड़ता है?

हल: नया राजस्व = खपत × कर

= (वास्तविक राजस्व का) (115% × 80%)

= वास्तविक राजस्व का $\left(\frac{115}{100} \times \frac{80}{100}\right)\%$

= वास्तविक राजस्व का $\left(\frac{115}{100} \times 80\right)\%$

= वास्तविक राजस्व का 92%

$\therefore$ राजस्व में (100 – 92 =) 8% की कमी आती है।

प्रमेय से: राजस्व पर प्रभाव

= मान में % वृद्धि – मान में % ह्रास – $\frac{\text{मान मे \%वृद्धि} \times \text{मान मे \% ह्रास}}{100}$

$$= 15 - 20 - \frac{15 \times 20}{100} = -8\%$$

इसलिए 8% की कमी होती है।

उदा. 51: यदि मूल्य 10% बढ़ा दिया जाए तथा बिक्री 5% कम हो जाए तो आय पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

हल: मान लिया कि प्रति वस्तु कीमत 100 रु. है तथा 100 वस्तुओं की ही बिक्री भी होती है।

$\therefore$ 100 वस्तुओं को बेचने के बाद प्राप्त राशि = 100 × 100 = 10000 रु..

बढ़ा हुआ मूल्य 110 रु. प्रति वस्तु है तथा घटी हुई बिक्री 95 वस्तुओं की है।

$\therefore$ कुल 95 वस्तुओं की बिक्री से प्राप्त राशि = 110 × 95 = 10450 रु.

$\therefore$ मुनाफा = 10450 – 10000 = 450 रु.

$\therefore$ % मुनाफा = $\frac{450 \times 100}{10000} = 4.5\%$

प्रमेय से:

% प्रभाव = % वृद्धि – % ह्रास – $\frac{(\text{\% वृद्धि}) \times (\text{\% ह्रास})}{100} = 10 - 5 - \frac{10 \times 5}{100} = 4.5\%$

$\therefore$ उसके आय में 4.5% की वृद्धि होती है।

उदा. 52: यदि मूल्य में 12% की कमी आती हो तथा बिक्री में 10 प्रतिशत की वृद्धि होती हो तो आय पर पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

हल: ***प्रमेय से:***

$$\% \text{ प्रभाव} = 10-12-\frac{12\times10}{100} = -3.2\%$$

$\therefore$ आय में 3.2% की कमी आती है।

उदा. 53: यदि किसी व्यक्ति के पास जमीन के रकवा (landholding) में 10% की कमी आती हो तथा मॉनसून में बिलम्ब की वजह से उत्पादन में 8% की कमी आती हो तो राजस्व पर कुल कितना प्रभाव पड़ेगा?

हल: किसी भी प्रकार के ह्रास को वृद्धि में बदल लें। मान लीजिए कि

10% ह्रास = –10% वृद्धि

उपर्युक्त सूत्र में इन मानों को रखने पर,

$$\% \text{ प्रभाव} = -10-8-\frac{(-10)\times8}{100}$$

$$= -18+0.8 = -17.2\%$$

$\therefore$ राजस्व में 17.2% की कमी आती है।

अब मान लीजिए कि हमलोग 8% ह्रास को 8% वृद्धि में बदल देते हैं, तब

8% ह्रास = –8% वृद्धि

उपर्युक्त सूत्र में इस मान को रखने पर,

$$\text{राजस्व पर प्रभाव (प्रतिशत में)} = -8-10-\frac{(-8)(10)}{100}$$

$$= -18+0.8 = -17.2\%$$

इस प्रकार हमें दोनों ही स्थितियों में समान परिणाम की प्राप्ति होती है। इसलिए, इस बात का विशेष महत्त्व नहीं है कि कौन-सा मान अपना रूप बदल देता है।

उदा. 54: किसी सिनेमा हॉल में सीटों की संख्या 25% बढ़ा दी जाती है। टिकट का मूल्य भी 10% बढ़ा दिया जाता है। संगृहीत राजस्व पर क्या प्रभाव पड़ता है?

हल: चूँकि यहाँ सीटों की संख्या एवं मूल्य दोनों मे वृद्धि होती हैं। इसलिए हम निम्नलिखित तर्क का उपयोग करते हैं:

ह्रास = - वृद्धि

अब, सूत्र के प्रयोग से:

$$\% \text{ प्रभाव} = 25-(-10)-\frac{25\times(-10)}{100}$$

$$= 35+2.5 = 37.5$$

$\therefore$ राजस्व में कुल 37.5% की वृद्धि होती है।

इस उदाहरण में भी किसी भी वृद्धि को ह्रास में बदलकर प्रश्न हल किया जा सकता है। दूसरे मान को बदलकर आप स्वयं हल करके देखें।

नोट: हम जानते हैं कि सर्वाधिक महत्वपूर्ण सूत्र $x+y+\frac{xy}{100}$ है। अन्य सभी रूप केवल चिह्नों को बदलकर ही प्राप्त किया जा सकता है।

i) x% वृद्धि एवं y% वृद्धि

$$=\left[x+y+\frac{xy}{100}\right]\% \text{ वृद्धि या ह्रास (चिह्न के अनुरूप)}$$

ii) x% वृद्धि एवं y% ह्रास [y = – y रखें]

$$=\left[x-y-\frac{xy}{100}\right]\% \text{ वृद्धि या ह्रास (चिह्न के अनुरूप)}$$

iii) x% ह्रास एवं y% वृद्धि [x = –x रखें]

$$=\left[-x+y-\frac{xy}{100}\right]\% \text{ वृद्धि या ह्रास (चिह्न के अनुरूप)}$$

iv) x% ह्रास एवं y% ह्रास [x = –x एवं y = –y रखें]

$$=\left[-x-y+\frac{xy}{100}\right]\% \text{ वृद्धि या ह्रास (चिह्न के अनुरूप)}$$

प्रमेय: किसी परीक्षा में सफल होने के लिए x% अंकों की जरूरत होती है। यदि कोई परीक्षार्थी y अंक प्राप्त करने के बावजूद z अंकों से असफल हो जाता हो तो अधिकतम अंक $M=\frac{100(y+z)}{x}$

प्रमाण: इस प्रमेय को सिद्ध करना बड़ा आसान है। मान लिया कि अधिकतम अंक (पूर्णांक) M है। प्रश्नानुसार,

M का x% = y + z

$$\therefore\ M=\frac{y+z}{x\%}=\frac{100(y+z)}{x}$$

नोट: यदि आपने संबंधों को भली-भाँति समझ लिया है तो सूत्र को याद करने की कोई आवश्यकता नहीं है। परंतु कुछ छात्र परीक्षा-भवन में संबंधों को लेकर भ्रम में पड़ जाते हैं। इसीलिए यहाँ सूत्र दे दिया गया है।

उदा. 55: किसी विद्यार्थी को सफल होने के लिए 40% अंक चाहिए। यदि उसे 40 अंक प्राप्त होते हैं, तो वह 40 अंकों से असफल हो जाता है तो पूर्णांक क्या है?

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार:

$$\text{पूर्णांक} = \frac{100(40+40)}{40}=200$$

उदा. 56: किसी परीक्षा में सफल होने के लिए परीक्षार्थी को 80% अंक चाहिए। यदि उसे 210 अंक प्राप्त होते हैं और वह 50 अंकों से असफल हो जाता है तो पूर्णांक बताएँ।

हल: उपर्युक्त प्रमेय से:

$$\text{पूर्णांक} = \frac{100\times(210+50)}{80} = 325 \text{ अंक}$$

प्रमेय: किसी परीक्षार्थी को परीक्षा में x% अंक प्राप्त होते हैं। इसके वावजूद वह 'a' अंकों से असफल हो जाता है। दूसरे परीक्षार्थी को y% अंक प्राप्त होते हैं जो उत्तीर्णांक से 'b' अंक अधिक है। ऐसी स्थिति में पूर्णांक $M = \frac{100(a+b)}{y-x}$

प्रमाण: मान लिया कि पूर्णांक = M

$\therefore$ पहले परीक्षार्थी द्वारा प्राप्त अंक = M का x%

एवं दूसरे परीक्षार्थी द्वारा प्राप्त अंक = M का y%

दोनों परीक्षार्थियों के लिए उत्तीर्णांक (pass marks) समान हैं।

M का x% + a = M का y% − b

$$\text{या, } \frac{Mx}{100}\times a = \frac{My}{100} - b$$

$$\text{या, } \frac{M(y-x)}{100} = a+b$$

$$\therefore \quad M = \frac{100(a+b)}{y-x}$$

उदा. 57: एक परीक्षार्थी परीक्षा में 25% अंक प्राप्त करता है तथा 30 अंकों से असफल हो जाता है। दूसरा परीक्षार्थी 50% अंक प्राप्त करता है जो कि उत्तीर्णांक (pass marks) से 20 अंक अधिक है। पूर्णांक क्या है?

हल: प्रमेय के अनुसार,

$$\text{पूर्णांक} = \frac{100(30+20)}{50-25} = 200$$

नोट: i) उपर्युक्त सूत्र को निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है:

$$\text{पूर्णांक} = \frac{100(\text{प्राप्तांकों का अंतर})}{\text{प्राप्तांकों के प्रतिशत का अंतर}}$$

ii) प्राप्तांकों का अंतर = 30 + 20

चूँकि पहले परीक्षार्थी को उत्तीर्णांक से 30 अंक कम प्राप्त होते हैं; जबकि दूसरे परीक्षार्थी को उत्तीर्णांक से 20 अंक अधिक प्राप्त होते हैं।

उदा. 58: एक परीक्षार्थी को परीक्षा में 30% अंक प्राप्त होते हैं और वह 50 अंकों से असफल हो जाता है। दूसरा परीक्षार्थी, जिसे 320 अंक प्राप्त होते हैं, वह भी 30 अंकों से असफल हो जाता है। पूर्णांक बताएँ।

हल: यहाँ उपर्युक्त सूत्र का सीधा इस्तेमाल मुश्किल है (क्यों?) इसलिए हम इस तथ्य का इस्तेमाल करेंगे कि दोनों परीक्षार्थियों के लिए पूर्णांक बराबर है।

यदि पूर्णांक x हो, तो पहले परीक्षार्थी के लिए उत्तीर्णांक = x का 30% + 50, तथा

दूसरे परीक्षार्थी के लिए उत्तीर्णांक = 320 + 30

$\therefore$ x का 30% + 50 = 320 + 30

या, $\frac{3x}{10} = 300$

$\therefore \quad x = \frac{300 \times 10}{3} = 1000$

उपर्युक्त विधि को ढंग से समझ लें, क्योंकि प्रश्न के स्वरूप में परिवर्तन होने पर भी यह विधि काम करती है।

प्रमेय: किसी आयत को मापने के क्रम में एक भुजा को गलती से x% अधिक माप लिया जाता है एवं दूसरे को y% कम माप लिया जाता है। इस माप से गणना किए जाने पर क्षेत्रफल के माप में प्रतिशत त्रुटि = $x - y - \frac{xy}{100}$ । यह त्रुटि वृद्धि के रूप में भी हो सकती है एवं ह्रास के रूप में भी। यदि वृद्धि होगी तो प्राप्त राशि का चिह्न धनात्मक होगा अन्यथा चिह्न ऋणात्मक होगा।

प्रमाण: मान लिया कि आयत की भुजाएँ a एवं b हैं।

$\therefore$ क्षेत्रफल = ab

माप में त्रुटि से भुजाएँ:

(a + a का x%) तथा (b − b का y%)

या, $\frac{a(100+x)}{100}$ तथा $\frac{b(100-y)}{100}$

$\therefore$ नया क्षेत्रफल $= \frac{ab(100+x)(100-y)}{100^2}$

त्रुटि $= \frac{ab(100+x)(100-y)}{(100)^2} - ab$

$= \frac{ab(100x - 100y - xy)}{(100)^2}$

%त्रुटि $= \frac{ab(100x-100y-xy)}{(100)^2} \times \frac{100}{ab} = x - y - \frac{xy}{100}$

$\therefore$ % त्रुटि (error) = % अधिक (excess) - % कम (deficit) - $\frac{\text{\% अधिक} \times \text{\% कम}}{100}$

उदा. 59: किसी आयत की भुजाओं को मापने के क्रम में एक भुजा यदि 5% अधिक माप लिया जाता है तथा दूसरा 4% कम माप लिया जाता है तो इस माप से क्षेत्रफल में होने वाले प्रतिशत त्रुटि की गणना करें।

हल: ***उपर्युक्त प्रमेय से:***

$$\text{\% त्रुटि} = 5-4-\frac{5\times4}{100}$$

$$= 1-\frac{1}{5}$$

$$= \frac{4}{5}\text{\% अधिक } (\because \text{ चिह्न धनात्मक है})$$

उदा. 60: यदि आयत की दोनों भुजाएँ क्रमशः 20% एवं 5% बढ़ा दी जाएँ, तो आयत के क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत का परिवर्तन होता है?

हल: उपर्युक्त प्रमेय इस सवाल के लिए भी उतना ही उपयोगी है। सवाल में दी गई सूचनाओं में केवल एक परिवर्तन अपेक्षित है। वृद्धि को ह्रास में बदल कर इस्तेमाल करें।

5% वृद्धि = –5% ह्रास

$$\therefore \text{\% प्रभाव} = 20-(-5)-\frac{20\times(-5)}{100} = 20+5+1 = 26\%$$

$\therefore$ चिह्न धनात्मक है, इसलिए क्षेत्रफल में 26% की वृद्धि हुई।

नोट: हमलोग दूसरी सूचना का भी उपयोग कर सकते हैं।

20% वृद्धि = – 20% ह्रास

अब आप स्वयं हल करने का प्रयत्न करें।

उदा. 61: यदि किसी वर्ग की भुजा 30% बढ़ा दी जाए तो उसके क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी?

हल: पिछले उदाहरण में प्रयुक्त विधि का इस्तेमाल करने पर,

$$\text{क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि} = 30-(-30)-\frac{30\times(-30)}{100}$$

$$= 60+9 = 69\%$$

प्रमेय: यदि किसी त्रिभुज, आयत, वर्ग, वृत्त, समचतुर्भुज (या किसी भी द्विविमीय ज्यामितीय आकृति) की भुजाओं में x% की वृद्धि होती है तो उसके क्षेत्रफल में $\frac{x(x+200)}{100}\%$ या $\left(2x+\frac{x^2}{100}\right)\%$ की वृद्धि होती है।

प्रमाण: पहले किसी त्रिभुज का उदाहरण लें।

मान लिया कि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ क्रमशः a, b एवं c हैं।

$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ $s = \frac{a+b+c}{2}$

जब तीनों भुजाएँ x% बढ़ा दी जाती हैं तो भुजाएँ क्रमशः

$\frac{a(100+x)}{100}, \frac{b(100+x)}{100}$ एवं $\frac{c(100+x)}{100}$ हो जाएँगी।

अब, $s_1 = \frac{(100+x)}{100}\left[\frac{a+b+c}{2}\right] = \frac{(100+x)}{100}s$

$\therefore$ नया क्षेत्रफल A_1

$$= \sqrt{s_1\left(s_1 - \frac{a(100+x)}{100}\right)\left(s_1 - \frac{b(100+x)}{100}\right)\left(s_1 - \frac{c(100+x)}{100}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{100+x}{100}\right)^4 s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\therefore \quad A_1 = \left(\frac{100+x}{100}\right)^2 A$$

क्षेत्रफल में % वृद्धि $= \frac{A_1 - A}{A} \times 100 = \frac{\left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right]A}{A} \times 100$

$$= \left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right] \times 100 = \left[\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 - 1\right] \times 100$$

$$= \left[1 + \frac{x^2}{(100)^2} + \frac{2x}{100} - 1\right]100 = \frac{x(x+200)}{100} = 2x + \frac{x^2}{100}$$

इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ x% बढ़ा दी जाएँ

तो इसके क्षेत्रफल में $\frac{x(x+200)}{100}$% या $\left(2x + \frac{x^2}{100}\right)$% की वृद्धि होती है।

आयत के लिए (For Rectangle)

मान लिया कि आयत की भुजाएँ a एवं b हैं।

$\therefore$ क्षेत्रफल $A = ab$

मान लिया कि इसकी भुजाएँ x% बढ़कर

$\frac{a(100+x)}{100}$ एवं $\frac{b(100+x)}{100}$ हो जाती हैं।

$\therefore$ नया क्षेत्रफल $A_1 = ab\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 = \left(\frac{100+x}{100}\right)^2 A$

$\therefore$ क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि $= \frac{A_1 - A}{A} \times 100$

$$= \frac{\left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right]A}{A} \times 100$$

$$= \left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right] \times 100 = \frac{x(x+200)}{100}$$

$$= 2x + \frac{x^2}{100}$$

इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि यदि किसी आयत की भुजाओं में x% की वृद्धि होती हो तो उसका क्षेत्रफल $\frac{x(x+200)}{100}$% या $\left(2x + \frac{x^2}{100}\right)$% बढ़ जाता है। यह वृद्धि त्रिभुज के क्षेत्रफल में होने वाली वृद्धि के बराबर है।

नोट: अब वर्ग एवं समचतुर्भुज के लिए अलग से गणना करने की कोई जरूरत नहीं है। इससे भी वही परिणाम मिलेगा।

आइए वृत्त के संदर्भ में विचार करें

मान लिया कि किसी वृत्त की त्रिज्या r मीटर है।

$\therefore$ इसका क्षेत्रफल $A = \pi r^2$

त्रिज्या में x% की वृद्धि होने पर त्रिज्या $= \frac{r(100+x)}{100}$

$\therefore$ नया क्षेत्रफल $A_1 = \pi\left[\frac{r(100+x)}{100}\right]^2$

$$= \pi r^2\left[\frac{(100+x)}{100}\right]^2 = \left[\frac{100+x}{100}\right]^2 A$$

$\therefore$ क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि $= \frac{A_1 - A}{A} \times 100$

$$= \left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right]100 = \frac{x(x+200)}{100} = 2x + \frac{x^2}{100}$$

इस प्रकार, यह पता चलता है कि उपर्युक्त सूत्र वृत्त पर भी लागू होता है।

निष्कर्ष: बतौर निष्कर्ष यह कहा जा सकता है कि उपर्युक्त सूत्र सभी प्रकार की द्विविमीय आकृतियों पर लागू होता है।

एक उदाहरण लीजिए। यदि किसी आयत की भुजाएँ 10 प्रतिशत बढ़ा दी जाएँ तो क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी?

हल: अभीष्ट उत्तर $= 2 \times 10 + \frac{(10)^2}{100} = 20 + 1 = 21\%$

नोट: 1. यदि भुजाएँ 10% घटा दी जाएँ तो क्षेत्रफल पर क्या प्रभाव पड़ेगा? (स्वयं प्रयास करें।)

2. यदि किसी त्रिविमीय वस्तु की भुजाएँ x% बढ़ा दी जाएँ तो उसके आयतन में कितनी वृद्धि होगी? (स्वयं प्रयास करें।)

प्रमेय: किसी परीक्षा में x% छात्र अंग्रेजी में असफल हो जाते हैं एवं y% गणित में असफल हो जाते हैं। यदि z% छात्र दोनों विषयों में असफल होते हों तो दोनों विषयों में उत्तीर्ण होने वाले छात्रों का प्रतिशत $= 100 - (x + y - z)$

प्रमाण: केवल अंग्रेजी में असफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत $= (x - z)\%$

केवल गणित में असफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत $= (y - z)\%$

दोनों विषयों में असफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत $= z\%$ (दिया हुआ है)

$\therefore$ दोनों विषयों में उत्तीर्ण होनेवाले छात्रों का प्रतिशत $= 100 - [(x - z) + (y - z) + z]$

$$= 100 - (x + y - z)$$

उदा. 62: किसी परीक्षा में 40% छात्र गणित में असफल हो जाते हैं, 30% अंग्रेजी में असफल हो जाते हैं तथा 10% दोनों में असफल हो जाते हैं। दोनों विषयों में उत्तीर्ण होने वाले छात्रों का प्रतिशत बताएँ।

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार,

अभीष्ट % $= 100 - (40 + 30 - 10) = 40\%$

नोट: हमलोगों को इस बात की जानकारी होनी चाहिए कि निम्नलिखित समुच्चय पद्धति को पूर्ण करता है।

100% = केवल अंग्रेजी में असफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत

\+ केवल गणित में असफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत

− दोनों विषयों में असफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत

\+ दोनों विषयों में सफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत

उदा. 63: एक व्यक्ति अपनी आय का 75% खर्च करता है। उसकी आय में 20% की वृद्धि होती है तथा साथ ही उसके खर्च में भी 10% की वृद्धि होती है। उसके बचत में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात करें।

हल : ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

माना कि उसकी मासिक आय = 100 रु.

इस प्रकार, वह 75 रु. खर्च करता है एवं 25 रु. बचाता है।

उसकी बढ़ी हुई आय = 100 + 100 का 20% = 120 रु.

उसका बढ़ा हुआ खर्च = 75 + 75 का 10% = 82.50 रु.

∴ उसकी नयी बचत = 120 − 82.50 = 37.50 रु.

∴ उसकी बचत में प्रतिशत वृद्धि = $\frac{37.50-25}{25}\times 100 = 50\%$

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

बचत में प्रतिशत वृद्धि = $\frac{20\times 100-10\times 75}{100-75} = \frac{1250}{25} = 50\%$

उदा. 64: नमक एवं पानी के एक घोल में नमक का भार 15% है। इसका 30 कि. ग्रा. पानी वाष्पीकृत हो जाता है एवं अब घोल में 20% नमक है। नमक की मूल मात्रा ज्ञात करें।

हल: माना कि प्रारंभ में x कि. ग्रा. घोल था।

नमक की मात्रा = x का 15% = $\frac{15x}{100} = \frac{3x}{20}$ कि. ग्रा

अब, वाष्पीकरण के बाद केवल (x − 30) कि. ग्रा. मिश्रण में $\frac{3x}{20}$ कि. ग्रा. नमक है।

या, (x − 30) का 20% = $\frac{3x}{20}$;

या, $\frac{x-30}{5} = \frac{3x}{20}$ या, 15x = 20x − 600

∴ $x = \frac{600}{5} = 120$ कि. ग्रा.

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

घोल की मूल मात्रा = वाष्पीकृत पानी की मात्रा $\left(\frac{\text{नमक की अंतिम प्रतिशत मात्रा}}{\text{नमक की प्रतिशत मात्रा में अंतर}}\right)$

$$= 30\left(\frac{20}{20-15}\right) = 120 \text{ कि. ग्रा.}$$

उदा. 65: एक पुस्तकालय में 20% किताबें हिंदी में हैं, बचे हुए का 50% अंग्रेजी में हैं तथा बचे हुए का 30% फ्रेंच में हैं। शेष 6300 किताबें क्षेत्रीय भाषाओं में हैं। पुस्तकालय में किताबों की कुल कितनी संख्या है?

हल : मान लिया कि पुस्तकालय में कुल x किताबें हैं।

तो, हिंदी में किताबों की संख्या = x का 20% = $\frac{x}{5}$

बचे हुए का 50% = $\left(x-\frac{x}{5}\right)$ का 50% = $\frac{4x}{5}$ का 50% = $\frac{2x}{5}$ अंग्रेजी मे हैं

अब, बचे हुए का 30%,

अर्थात् $\left\{x-\left(\frac{x}{5}+\frac{2x}{5}\right)\right\}$ का 30% = $\frac{2x}{5}$ का 30% = $\frac{3x}{25}$ किताबें फ्रेंच में हैं।

अब, $x-\left(\frac{x}{5}+\frac{2x}{5}+\frac{3x}{25}\right) = 6300$

या, $\frac{7x}{25} = 3600$

$\therefore \ x=\frac{6300\times 25}{7} = 22500$

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

किताबों की कुल संख्या = $6300\left(\frac{100}{100-20}\right)\left(\frac{100}{100-50}\right)\left(\frac{100}{100-30}\right)$

$= \frac{6300\times 100\times 100\times 100}{80\times 50\times 70} = 22500$

उदा. 66: दूध और पानी के 40 लिटर मिश्रण में 10% पानी है। नए मिश्रण में पानी की मात्रा को 20% करने के लिए कितना पानी मिलाना पड़ेगा?

हल: पानी की मात्रा = 40% का 10% = 4 लिटर

अब, मान लिया कि x लिटर पानी मिलाया जाता है।

तो, $4 + x = (40+x)$ का 20%

या, $4 + x = \frac{40+x}{5}$

या, $20 + 5x = 40 + x$

$\therefore \ x = \frac{20}{4} = 5$ लिटर

द्रुत विधि (Quicker Method) :

मिलाया गया पानी की मात्रा $= \dfrac{40(20-10)}{(100-20)} = 5$ लिटर

उदा. 67: एक उत्पादक एक वस्तु पर 25% मुनाफा कमाता है, एक थोक विक्रेता 20% मुनाफा कमाता है एवं खुदरा विक्रेता 28% मुनाफा कमाता है। यदि खुदरा विक्रेता इसे 48 रु. में बेचता है तो उस वस्तु का उत्पादन मूल्य ज्ञात करें।

हल: भिन्न के नियम से,

उत्पादन मूल्य $= 48\left(\dfrac{100}{100+28}\right)\left(\dfrac{100}{100+20}\right)\left(\dfrac{100}{100+25}\right)$

$= 48\left(\dfrac{100}{128}\right)\left(\dfrac{100}{120}\right)\left(\dfrac{100}{125}\right) = 25$ रु.

उदा. 68: 9 लिटर की 50% अम्लीय द्रव को 30% अम्लीय द्रव बनाने हेतु पानी की कितनी मात्रा मिलानी चाहिए?

हल : **विस्तार विधि (Detail Method) :**

9 लिटर में अम्ल की मात्रा = 9 का 50% = 4.5 लिटर

माना कि x लिटर पानी मिलाया जाता है।

अब, (9 + x) लिटर तनु द्रव (diluted liquid) में 4.5 लिटर अम्ल है।

प्रश्नानुसार,

(9 + x) का 30% = 4.5

या, $\dfrac{3}{10}(9+x) = 4.5$ या, $27 + 3x = 45$

या, $3x = 18$

$\therefore \quad x = \dfrac{18}{3} = 6$ लिटर

द्रुत विधि (Quicker Method) :

मिलाए जाने वाले पानी की मात्रा $= \dfrac{9(50-30)}{30} = 6$ लिटर

उदा. 69: किसी परीक्षा में विद्यालय 'A' से सफल विद्यार्थियों का प्रतिशत, परीक्षा में बैठने वाले कुल विद्यार्थियों का 70% है। विद्यालय 'B' से परीक्षा में बैठने वाले विद्यार्थियों की संख्या विद्यालय 'A' से परीक्षा में बैठने वाले विद्यार्थियों की संख्या से 20% अधिक है। एवं विद्यालय 'B' से कुल सफल विद्यार्थियों की संख्या, विद्यालय 'A' से कुल सफल विद्यार्थियों की संख्या से 50% अधिक है। विद्यालय 'B' से परीक्षा में सफल विद्यार्थियों का प्रतिशत परीक्षा में बैठने वाले कुल विद्यार्थियों का कितना है?

1) 30% 2) 70% 3) 87.5% 4) 78.5% 5) इनमें से कोई नहीं

हल : ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

माना कि विद्यालय 'A' से 100 विद्यार्थी परीक्षा में बैठते हैं

तो, प्रश्नानुसार,

विद्यालय	परीक्षा में बैठने वालों की संख्या	सफल होने वालों की संख्या
A →	100	70
B →	120	70 + 70 का 50% = 105

∴ अभीष्ट प्रतिशत $= \frac{105}{120} \times 100 = 87.5\%$

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

अभीष्ट $\% = \frac{70 \times (100+50)\%}{100 \times (100+20)\%} \times 100$

$= \frac{70 \times 150}{100 \times 120} \times 100$

$= 87.5\%$

उदा. 70: बालू एवं लोहे के 1 कि. ग्रा. मिश्रण में 20% लोहा है। लोहे की मात्रा को 10% करने के लिए मिश्रण में कितनी मात्रा में बालू मिलाना होगा?

1) 1 कि. ग्रा. 2) 200 ग्रा. 3) 800 ग्रा. 4) 1.8 कि. ग्रा.

5) इनमें से कोई नहीं

हल: 1 कि. ग्रा. मिश्रण में लोहा = 1000 ग्रा. का 20% = 200 ग्रा.

एवं बालू = 800 ग्रा.

माना कि x ग्रा. बालू मिश्रण में मिलाया जाता है।

तो, कुल मिश्रण = (1000 + x) ग्रा.

अब, लोहे का प्रतिशत $= \frac{200}{(1000+x)} \times 100 = 10$ (दिया हुआ है)

या, $1000 + x = 2000$

∴ $x = 1000$ ग्रा. = 1 कि. ग्रा.

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

A एवं B के एक मिश्रण में, जब वस्तु B की खास मात्रा वस्तु A की प्रतिशत मात्रा को परिवर्तित करने के लिए मिलाया जाता है तो मिलाए जाने वाली वस्तु B की मात्रा

$$= \left[\frac{\text{A का पहले का प्रतिशत मान}}{\text{A का परिवर्तित प्रतिशत मान}} \times \text{मिश्रण की मात्रा}\right] - \text{मिश्रण की मात्रा}$$

प्रतिशत

1. यदि $(x - y)$ का 50% = $(x + y)$ का 30% है, तो x का कितना प्रतिशत y है?

(1) 25% (2) $33\frac{1}{3}\%$
(3) 40% (4) 400%
(5) इनमें से कोई नहीं

2. यदि A की आय का 10% = B की आय का 15% = C की आय का 20% है। यदि उनकी आय का कुल योग ₹ 7800 हो, तो B की आय होगी

(1) ₹ 3600 (2) ₹ 3000
(3) ₹ 2400 (4) ₹ 1800
(5) इनमें से कोई नहीं

3. यदि किसी वृत की त्रिज्या में 50% की वृद्धि कर दी जाए तो उसके क्षेत्रफल में कितनी वृद्धि होगी?

(1) 125% (2) 100%
(3) 75% (4) 50%
(5) इनमें से कोई नहीं

4. यदि संख्या x किसी अन्य संख्या y से 10% कम है तथा y संख्या 125 से 10% अधिक है, तो x बराबर है

(1) 150 (2) 143
(3) 140.55 (4) 123.75
(5) इनमें से कोई नहीं

5. किसी व्यक्ति के वेतन में पहले 20% की वृद्धि की गई और फिर उसमें 20% की कमी की गई। उसके वेतन में परिवर्तन है-

(1) 4% कमी (2) 4% वृद्धि
(3) 8% कमी (4) न कमी न वृद्धि
(5) इनमें से कोई नही

6. 1 घण्टा 45 मिनट की समयावधि एक दिन का कितना प्रतिशत है?

(1) 7.218 (2) 7.291
(3) 8.3 (4) 8.24
(5) इनमें से कोई नहीं

7. किसी परीक्षा में 35% उम्मीदवार गणित में तथा 25% अंग्रेजी में फेल हुए। यदि 10% उम्मीदवार गणित तथा अंग्रेजी दोनों में फेल हुए हों, तो कितने प्रतिशत विद्यार्थी दोनों विषयों में पास हुए ?

(1) 50 (3) 55
(3) 57 (4) 60
(5) इनमें से कोई नहीं

8. किसी आयताकार क्षेत्र की प्रत्येक भुजा 40% कम कर दी गयी है। आयताकार क्षेत्र के क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत की कमी हो जाती है?

(1) 32 (2) 64
(3) 25 (4) 16
(5) इनमें से कोई नहीं

9. चीनी के भाव में 25% की वृद्धि होती है। यदि कोई परिवार चीनी पर किये जाने वाले अपने व्यय को पहले जैसा ही रखना चाहे, तो परिवार द्वारा चीनी की खपत में कितनी कमी करनी होगी?

(1) 25% (2) 20%
(3) 80% (4) 75%
(5) इनमें से कोई नहीं

10. किसी वस्तु के भाव में 25% की कमी हो गयी, किन्तु वस्तु की दैनिक बिक्री में 30% की वृद्धि हो जाती है। परिणाम स्वरूप दैनिक बिक्री से प्राप्त धनराशि कितनी हो जाएगी।

(1) $2\frac{1}{2}\%$ की वृद्धि (2) $2\frac{1}{2}\%$ की कमी
(3) 2% की वृद्धि (4) 2% की कमी
(5) इनमें से कोई नहीं

Scanned by CamScanner

11. यदि x की कमाई y से 25% अधिक हो, तो y की कमाई x से कितना प्रतिशत कम है?

(1) 16 (2) 10
(3) 20 (4) 25
(5) इनमें से कोई नहीं

12. किसी वस्तु का मूल्य ₹ 75 था। पहले मूल्य में 20% की वृद्धि की गयी तथा बाद में इसमें 20% की कमी कर दी गयी। वस्तु का वर्तमान मूल्य है

(1) ₹ 72 (2) ₹ 60
(3) ₹ 75 (4) ₹ 90
(5) इनमें से कोई नहीं

13. श्री गिरिधर घरेलू चीजों पर अपनी मासिक आय का 50% खर्च करता है और शेष में से 50% परिवहन पर, 25% मनोरंजन पर, 10% खेलकूद पर खर्च करता है और शेष ₹ 900 की राशि बचत करता है। श्री गिरिधर की मासिक आय क्या है?

(1) ₹ 6,000 (2) ₹ 12,000
(3) ₹ 9,000 (4) तय नहीं कर सकते
(5) इनमें से कोई नहीं

14. श्री मोरे अपनी मासिक आय का 20% खाद्य सामग्री और 15% बच्चों की शिक्षा पर खर्च किया। मनोरंजन और परिवहन पर मिलाकर उसने शेष का 40% खर्च किया और 30% चिकित्सा पर खर्च किया। इन सभी खर्चों के बाद उसके पास ₹ 8,775 की राशि बची है। श्री मोरे की मासिक आय कितनी है?

(1) ₹ 40,000 (2) ₹ 35,000
(3) ₹ 42,000 (4) ₹ 38,000
(5) इनमें से कोई नहीं

15. यदि एक भिन्न के अंश में 200% और हर में 350% की वृद्धि की जाए तो परिणामी भिन्न $\frac{5}{12}$ आता है। मूल भिन्न क्या था?

(1) $\frac{5}{9}$ (2) $\frac{5}{8}$
(3) $\frac{7}{12}$ (4) $\frac{11}{12}$
(5) इनमें से कोई नहीं

16. एक संख्या के $\frac{3}{5}$ के 60% का 40%, 504 है। उस संख्या के $\frac{2}{5}$ का 25% कितना है?

(1) 130 (2) 175
(3) 360 (4) 350
(5) इनमें से कोई नहीं

17. प्रत्येक प्रश्न के एक अंक वाले 80 प्रश्नों की एक परीक्षा में अर्पिता पहले 40 प्रश्नों के 65% सही उत्तर देती है। पूर्ण परीक्षा में 75% अंक पाने के लिए शेष 40 में से उसे कितने प्रतिशत सही उत्तर देने होंगे?

(1) 60 (2) 80
(3) 75 (4) 40
(5) इनमें से कोई नहीं

18. यदि एक भिन्न का अंश 200% बढ़ाया जाए और हर 400% बढ़ाया जाए, तो परिणामी भिन्न $1\frac{1}{20}$ होगा। मूल भिन्न कितना था?

(1) $1\frac{3}{4}$ (2) $\frac{11}{10}$
(3) $\frac{6}{5}$ (4) $1\frac{1}{2}$
(5) इनमें से कोई नहीं

19. 500 के $\frac{6}{7}$ के 42% का 35% कितना होगा?

(1) 36 (2) 44
(3) 52 (4) 60
(5) इनमें से कोई नहीं

20. 65 छात्रों और 4 शिक्षकों की एक कक्षा में प्रत्येक छात्र को छात्रों की कुल संख्या का 20 प्रतिशत और प्रत्येक शिक्षक को छात्रों की कुल संख्या का 40 प्रतिशत स्वीट्स मिलता है। कुल कितनी स्वीट्स थी?

(1) 845 (2) 897
(3) 949 (4) 104
(5) इनमें से कोई नहीं

Scanned by CamScanner

21. दो उम्मीदवारों के बीच कालेज के एक चुनाव में, एक को कुल वैध वोट के 55% वोट मिले। 15% वोट वैध नहीं थे। अगर कुल वोट 15200 थे, तो दूसरे उम्मीदवार को प्राप्त वैध वोट कितने मिले थे?
(1) 7106 (2) 6840
(3) 8360 (4) 5814
(5) इनमें से कोई नहीं

22. एक संख्या के 45% का 15%, 105.3 है। इस संख्या का 24% कितना है?
(1) 385.5 (2) 374.4
(3) 390 (4) 375
(5) इनमें से कोई नहीं

23. एक भिन्न का अंश 220% और हर 150% बढ़ाने पर परिणामी भिन्न $\frac{4}{5}$ है, तो मूल भिन्न क्या है?
(1) $\frac{5}{8}$ (2) $\frac{3}{5}$
(3) $\frac{4}{5}$ (4) $\frac{5}{6}$
(5) इनमें से कोई नहीं

24. 250 प्रश्नों वाली एक परीक्षा में जस्सी ने पहले 125 में से 40% के उत्तर सही दिये। संपूर्ण परीक्षा में उसका ग्रेड 60% हो इसके लिए उसे शेष 125 प्रश्नों में से कितने प्रतिशत के उत्तर सही देने होंगे?
(1) 75 (2) 80
(3) 60 (4) तय नहीं कर सकते
(5) इनमें से कोई नहीं

25. 4500 के $\frac{5}{9}$ के 36% का 27% कितना है?
(1) 239 (2) 241
(3) 243 (4) 245
(5) इनमें से कोई नहीं

26. यदि एक भिन्न के अंश को 300% बढ़ाया जाए और हर को 100% बढ़ाया जाए तो परिणामी भिन्न $1\frac{11}{19}$ होता है। मूल भिन्न क्या था?
(1) $\frac{15}{19}$ (2) $\frac{13}{19}$
(3) $\frac{5}{9}$ (4) $\frac{4}{9}$
(5) इनमें से कोई नहीं

27. एक संख्या का $\frac{5}{6}$, 720 है। उस संख्या का 45% कितना होगा?
(1) 346.6 (2) 388.8
(3) 392.2 (4) 344.4
(5) इनमें से कोई नहीं

28. 35 छात्रों और 6 अध्यापकों की एक कक्षा में प्रत्येक छात्र को छात्रों की कुल संख्या की 20% टॉफी और प्रत्येक अध्यापक को छात्रों की कुल संख्या की 40% टॉफी मिलती है। कुल कितनी टॉफी है।
(1) 245 (2) 161
(3) 406 (4) 84
(5) इनमें से कोई नहीं

29. एक संख्या का एक-तिहाई 96 है। उस संख्या का 67% कितना होगा?
(1) 192.96 (2) 181.44
(3) 169.92 (4) 204.48
(5). इनमें से कोई नहीं

30. यदि एक भिन्न का अंश 300% बढ़ाया जाता है और भिन्न का हर 150%, बढ़ाया जाता है, तो परिणामी भिन्न $\frac{3}{5}$ है। मूल भिन्न क्या है?
(1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{1}{8}$
(3) $\frac{3}{7}$ (4) $\frac{2}{7}$
(5) इनमें से कोई नहीं

31. एक द्विअंकीय घनात्मक संख्या में इकाई के स्थान का अंक दहाई के स्थान के अंक के वर्ग के समान है तथा संख्या के अंकों को परस्पर बदल कर प्राप्त संख्या के बीच का अंतर 54 है। मूल संख्या का 40% क्या है?

Scanned by CamScanner

(1) 15.6 (2) 39
(3) 37.2 (4) 24
(5) इनमें से कोई नहीं

32. यदि एक वेलन की ऊँचाई में 15% की वृद्धि तथा इसके आधार के अर्द्धव्यास में 10% की कमी की जाए, तो इसके वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत का वदलाव आएगा?
(1) 3.5% की कमी (2) 3.5% की वृद्धि
(3) 5% की वृद्धि (4) 5% की कमी
(5) इनमें से कोई नहीं

33. यदि रवि का वेतन राजु के वेतन से 25% अधिक हो, तो राजु का वेतन रवि के वेतन से कितना प्रतिशत कम होगा-
(1) 15 (2) 20
(3) 25 (4) 32
(5) इनमें से कोई नहीं

34. एक उम्मीदवार, जिसे 30% अंक प्राप्त होते हैं, 5 अंकों से फेल हो जाता है; जबकि एक अन्य उम्मीदवार जिसे 40% अंक प्राप्त होते हैं, पास होने के लिए आवश्यक न्यूनतम अंकों से 10 अधिक अंक प्राप्त करता है। पास होने के आवश्यक न्यूनतम अंक होंगे-
(1) 50 (2) 70
(3) 100 (4) 150
(5) इनमें से कोई नहीं

35. 60 छात्रों की एक कक्षा में 40% केवल हिन्दी बोल पाते हैं, 25% केवल अंग्रेजी बोल पाते हैं और शेष छात्र दोनों भाषाएं बोल लेते हैं। कुल कितने छात्र अंग्रेजी बोल पाते हैं?
(1) 32 (2) 28
(3) 36 (4) 15
(5) इनमें से कोई नहीं

36. एक पुस्तकालय में 30% पुस्तकें अंग्रेजी में, 50% पुस्तकें हिन्दी में और शेष 500 अन्य भाषाओं में हैं। पुस्तकालय में कुल कितनी पुस्तकें हैं?
(1) 2700 (2) 2750
(3) 2555 (4) 2500
(5) इनमें से कोई नही

37. एक छात्र प्रत्येक सौ-सौ अंक वाले 8 पेपरों में 55% अंक प्राप्त करता है। उसे अंग्रेजी में अपने कुल अंकों का 15% मिलता है। उसे अंग्रेजी में कितने अंक मिले हैं?
(1) 55 (2) 66
(3) 77 (4) 44
(5) इनमें से कोई नही

38. निखिल ने अपने मासिक छात्रवृत्ति का 45% भोजन और परिवहन पर खर्च किया, वाकी में से 20% किताबों पर और वाकी वचे का आधा दूसरे खर्चों में खत्म हुआ। यदि अब उसके पास ₹ 880 वचे हों तो उसका मासिक छात्रवृत्ति कितना है?
(1) ₹ 6,000 (2) ₹ 4,500
(3) ₹ 3,000 (4) ₹ 3,600
(5) ₹ 4,000

39. एक संख्या का 65% उसके 36% से 58 अधिक है। उस संख्या का 23% कितना है?
(1) 66 (2) 69
(3) 48 (4) 46
(5) इनमें से कोई नहीं

40. गौरव अपने पिता से प्राप्त राशि में से 40% हॉस्टेल पर, 20% कितावों और स्टेशनरी पर और शेष का 50% परिवहन पर खर्च करता है। हॉस्टेल, किताब आदि और परिवहन पर खर्च करने के वाद ₹ 450 जो शेष का आधा है उसे वह वचाता है। उसे अपने पिता से कितने ₹ मिले थे?
(1) ₹ 3,000 (2) ₹ 6,000
(3) ₹ 4,500
(4) निर्धारित नहीं किया जा सकता है
(5) इनमें से कोई नहीं

41. नंदकिशोर के पास जितने पैसे थे उसमें से 35% अपनी पत्नी को और 50% अपने पुत्रों को देता है। शेष ₹ 11,250 उसने अपने लिए रखे। नंदकिशोर के पास कुल कितने पैसे थे?
(1) ₹ 63,750 (2) ₹ 75,000
(3) ₹ 73,650 (4) ₹ 72,450
(5) इनमें से कोई नहीं

Scanned by CamScanner

42. यदि किसी लम्ब वृत्ताकार बेलन के अर्द्धव्यास में 50% कमी तथा इसकी ऊँचाई में 60% की वृद्धि हो जाए, तो इसके आयतन में कमी हो जाएगी

(1) 10% (2) 60%
(3) 40% (4) 20%
(5) इनमें से कोई नहीं

43. किसी परीक्षा में 65% विद्यार्थी गणित में 48% भौतिकी में उत्तीर्ण हुए तथा 30% दोनों विषयों में उत्तीर्ण हुए। कितने प्रतिशत विद्यार्थी इन दोनो विषयों में अनुत्तीर्ण हुए?

(1) 17% (2) 43%
(3) 13% (4) 47%
(5) इनमें से कोई नहीं

44. एक गांव में 60% परिवारों में से प्रत्येक के पास एक गाय है 30% परिवारों में से प्रत्येक के पास एक भैंस है तथा 15% परिवारों में से प्रत्येक के पास एक गाय और भैंस दोनों है। कुल मिलाकर गाँव में 96 परिवार हैं। ऐसे कितने परिवार है जिनके पास न एक गाय है और न ही एक भैंस है?

(1) 20 (2) 24
(3) 26 (4) 28
(5) 32

45. p, q से 6 गुना वड़ा है। q, p से कितने प्रतिशत कम है?

(1) $83\frac{1}{3}$ (2) 70
(3) $63\frac{1}{3}$ (4) 50
(5) इनमें से कोई नहीं

46. चीनी के भाव में 20% की वढ़ोत्तरी हो गयी है। परिणाम स्वरुप एक परिवार ने अपनी चीनी की खपत में 20% की कमी कर दी है। इससे परिवार द्वारा चीनी पर किए जाने वाले व्यय में कितनी कमी हुई?

(1) 0% (2) 2.5%
(3) 4% (5) 5%
(5) इनमें से कोई नहीं

47. यदि आयकर में 19% की वृद्धि हो, तो कुल आय में 1% की कमी हो जाती है। आयकर की दर है

(1) 6% (2) 4%
(3) 5% (4) 7.2%
(5) इनमें से कोई नहीं

48. एक गांव की जनसंख्या 9600 थी। किसी वर्ष पुरुषों की जनसंख्या में 8% तथा महिलाओं की जनसंख्या में 5% की वृद्धि होने पर, गाँव की जनसंख्या 10272 हो गई। वृद्धि से पहले पुरुषों की जनसंख्या कितनी थी?

(1) 4200 (2) 4410
(3) 6400 (4) 6048
(5) इनमें से कोई नहीं

49. एक विद्यार्थी ने किसी संख्या को $\frac{5}{3}$ से गुणा करने के स्थान पर इसे $\frac{3}{5}$ से गुणा कर दिया, परिकलन में त्रुटि प्रतिशत कितनी है?

(1) 44% (2) 34%
(3) 54% (4) 64%
(5) 74%

50. यदि किसी विद्यालय में कुल विद्यार्थियों का 60% लड़कें हो और लड़कियों की संख्या 972 हो, तो उस विद्यालय में कुल कितने लड़के है?

(1) 1258 (2) 1458
(3) 1324 (4) 1624
(5) 1828

Scanned by CamScanner

प्रतिशत-भिन्न -चार्ट तालिका

$\frac{1}{2} = 50\%$	$\frac{1}{8} = 12\frac{1}{2}\%$	$\frac{1}{20} = 5\%$	$\frac{2}{11} = 18\frac{2}{11}\%$
$\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\%$	$\frac{1}{9} = 11\frac{1}{9}\%$	$\frac{1}{25} = 4\%$	$\frac{5}{11} = 45\frac{5}{11}\%$
$\frac{1}{4} = 25\%$	$\frac{1}{10} = 10\%$	$\frac{2}{5} = 40\%$	$\frac{1}{8} = 12\frac{1}{2}\%$
$\frac{1}{5} = 20\%$	$\frac{1}{11} = 9\frac{1}{11}\%$	$\frac{3}{5} = 60\%$	$\frac{3}{8} = 36 + 1\frac{1}{2}\% = 37\frac{1}{2}\%$
$\frac{1}{6} = 16\frac{2}{3}\%$	$\frac{1}{12} = 8\frac{1}{3}\%$	$\frac{4}{5} = 80\%$	$\frac{5}{8} = 62\frac{1}{2}\%$
$\frac{1}{7} = 14\frac{2}{7}\%$	$\frac{1}{15} = 6\frac{2}{3}\%$	$\frac{4}{7} = 57\frac{1}{7}\%$	$\frac{7}{8} = 87\frac{1}{2}\%$
		$\frac{1}{11} = 9\frac{1}{11}\%$	

विस्तारपूर्वक उत्तर:-

1.1; $(x - y)$ का 50% = $(x + y)$ का 30 %

$$5(x - y) = 3(x + y)$$
$$5x - 5y = 3x + 3y$$
$$2x = 8y$$
$$\frac{x}{y} = \frac{8}{2} \Rightarrow y = \frac{2}{8} \times 100 = x \text{ का } 25\%$$

2.3; पैरामाउंट विधि:-

कुल आय = 7800 होगी

A का 10% = B का 15% = C का 20%

यदि 5% = 1

तो, 2A = 3B = 4C

ल०स० = (12)

A : B : C

$\frac{12}{2} : \frac{12}{3} : \frac{12}{4}$

A : B : C = 6 : 4 : 3 = कुल = 13

B की आय = $\frac{4}{13} \times 7800$ = ₹ 2400

3.1; लघु विधि:-

50% + 50% + 50% का 50%

100% + 25% = 125%

3.1; पैरामाउंट विधि:-

$$50\% = \frac{1}{2} \frac{\text{बढत}}{\text{सभी}}$$

यह दर्शाता है कि जब त्रिज्या 2 इकाई है, तो 50% की बढत है मतलब एक इकाई की बढत।

= पुराना : नया

2 → (2 + 1) = 3

नया, पुराना क्षेत्रफल : नया क्षेत्रफल

$\pi(2)^2 : \pi(3)^2$

ऐसे प्रश्न में हम स्थिर पद को हटा देते हैं। इसका मतलब,

पुराना क्षेत्रफल : पुराना क्षेत्रफल

4 : 9

अंतर = (5)

$\therefore$ अपेक्षित% = $\frac{\text{अंतर}}{\text{मूल}} \times 100 = \frac{5}{4} \times 100 = 125\%$

Scanned by CamScanner

3.1; पैरामाउंट विधि:-

माना की पुराना क्षेत्रफल 100 है।
50% की बढ़त मतलब 150%
इसलिए, 100 × 150% × 150%
क्योंकि 2 आयाम का है।

$100 \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = 225$

100 → 225
बढ़त = 125%

दूसरी विधि:-

माना $R_1 = 100$
तब $R_2 = 150$ (50% वृद्धि के बाद)
वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

% बढ़त क्षेत्रफल में $= \frac{\text{अंतर}}{\text{मूल}} \times 100$

$\frac{\pi (r_2)^2 - \pi (r_1)^2}{\pi r_1^2} \times 100$

$\frac{\pi (r_2^2 - r_1^2)}{\pi r_1^2} \times 100 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2} \times 100$

$\frac{(150)^2 - (100)^2}{(100)^2} \times 100$ $\left[\begin{array}{l} a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\ 150^2 - 100^2 = (150+100) \\ (150-100) = 250 \times 50 \end{array}\right]$

$\frac{250 \times 50}{10000} \times 100 = 25 \times 5 = 125\%$

4.4; पैरामाउंट विधि:-

$125 \times \frac{11}{10} \times \frac{9}{10} = 123.75$

↓ संख्या, ↓ $y(+10\%)$, ↓ $x(-10\%)$

4.4; $x = y - y$ का 10%

$x = \frac{9}{10} y$

अब, $y = 125 + 125$ का 10%

$= \frac{110}{100} \times 125$

$\therefore x = \frac{9}{10} \times \frac{110}{100} \times 125 = 123.75$

दूसरी विधि:-

$y = 125 + \frac{10}{100} \times 125 = 125 + 12.5$

$x = 137.5 - \frac{10}{100} \times 137.5$ (x: y से 10% कम है)

137. 5 - 13.75 = 123.75/-

5.2; लघु विधि:-

+ 20% - 20% + (+20%) का (-20%)
0% - 4%
= - 4% (कमी)

5.2; पैरामाउंट विधि:-

माना पुराना 100 —(+ 20%)→ नया 120

फिर से 120 —(- 20%)→ 96

अंतर = 4/- ⇒ %अंतर $= \frac{\text{अंतर}}{\text{मूल}} \times 100$

$= \frac{4}{100} \times 100 = 4\%$ कमी

5.2; पैरामाउंट विधि:-2

यदि बढ़त और कमी दोनों समान हो, तो

$\frac{(\text{प्रतिशत})^2}{100} \Rightarrow \frac{20^2}{100} = \frac{400}{100} = 4$

इस तरह के प्रश्न में हमेशा कमी होगी।

दूसरी विधि:-

माना की वेतन x है।
(पहली स्थिति :- जब बढ़त 20% ↑)

$x \rightarrow \frac{120x}{100}$

(दूसरी स्थिति :- जब कमी 20% ↓)

$\frac{120x}{100} \rightarrow \frac{80}{100} \times \frac{120x}{100} = \frac{24x}{25}$

वेतन में बदलाव $= x - \frac{24x}{25} = \frac{x}{25}$

अपेक्षित % $= \frac{\frac{x}{25}}{x} \times 100 = 4\%$ (कम)

Scanned by CamScanner

6.2; 1 घंटा 45 मिनट = $\frac{7}{4}$ घंटा

$$\frac{7}{4 \times 24} \times 100 = 7.291\%$$

7.1; गणित में फेल = 35%

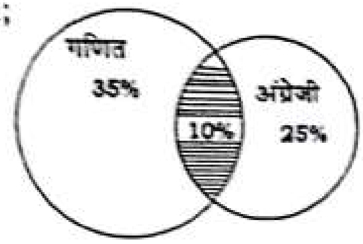
अंग्रेजी में फेल = 25%

दोनों में फेल = -10

सभी में फेल = 50% (कुल पास = 50%)

दूसरी विधि:-

7.1;



फेल या तो गणित में या अंग्रेजी में = 35 + 25 - 10

= 50%

चित्र से स्पष्ट है कि 10% दोनों में सम्मलित है।

अपेक्षित % = (100 - 50) = 50%

> 8.2; **लघु विधि:-**
>
> - 40% - 40% + (-40%) का (-40%)
>
> - 80% + 16% = 64%

8.2; यदि किसी लम्बाई और चौड़ाई को क्रमशः x% और y% कर दिया जाए।

∴ प्रभावी क्षेत्रफल:-

$$= \left(x + y + \frac{xy}{100}\right)\%$$

यहाँ, $x = -40\%$, $y = -40\%$

∴ प्रतिशत में कमी%

$$= \left(-40 - 40 + \frac{40 \times 40}{100}\right)\% = (-80 + 16)\%$$

$= -64\%$

नकारात्मक चिन्ह् कमी को दर्शाता है।

> 8.2; **पैरामाउंट विधि:-**
>
> $$40\% = \frac{2 \rightarrow \text{कमी}}{5 \rightarrow \text{मूल पक्ष}}$$
>
> चूंकि,
>
> | | मूल | : | नया |
> |---|---|---|---|
> | लम्बाई | 5 | | 3 |
> | चौड़ाई | × 5 | | × 3 |
> | क्षेत्रफल | 25 | | 9 |
>
> क्षेत्रफल = (लम्बाई × चौड़ाई)
>
> इसलिए अपेक्षित बदलाव = 25 - 9 = 16
>
> $$\text{आपेक्षित \%} = \frac{16}{25} \times 100 = 64\% \text{ (कम)}$$

तीसरी विधि:-

	पुराना	नया
लम्बाई =	100	60
चौड़ाई =	100	60

अथवा

लम्बाई =	10	6
चौड़ाई =	10	6
क्षेत्रफल =	100	36
कम =	64	

$$\text{कम\%} = \frac{\text{कम}}{\text{मूल}} \times 100$$

$$= \frac{64}{100} \times 100 = 64\%$$

9.2; 100 $\xrightarrow{25\%}$ 125%

$$\text{खर्च समान रखने के लिए} = \frac{25}{125} \times 100 = 20\%$$

खपत में 20% की कमी होनी चाहिए।

> 9.2; **पैरामाउंट विधि:-**
>
> $$25\% = \frac{1 \rightarrow}{4 \rightarrow}\frac{\text{बढत}}{\text{मूल}}$$
>
> | मूल मूल्य | : | नया मूल्य |
> |---|---|---|
> | 4 | : | 5 |
>
> खर्च समान रखने के लिए खपत को कम करना होगा। $= \frac{1}{5} \times 100 = 20\%$
>
> $$\text{कमी} = \frac{1 \rightarrow \text{कम}}{5 \rightarrow \text{नया मूल्य}}$$

Scanned by CamScanner

दूसरी विधि:-

मूल्य	मात्रा	खर्च (मूल्य ×मात्रा)
₹10	10कि०ग्रा०	₹100 (मूल)
↓+ 25%	↓समान रहेगा	↓+ ₹25%
		₹125 (नया)
₹12.5	10 कि०ग्रा०	

परन्तु **खर्च** समान रखने के लिए ₹25 कम करना होगा।

$\therefore$ अपेक्षित % = $\frac{₹25}{₹125} \times 100 = 20\%$

तीसरी विधि:-

मूल्य × खपत = खर्च (चूंकि खर्च समान है।)

$P_1 \times C_1 = P_2 \times C_2$

$100 \times C_1 = 125 \times C_2$

$\frac{C_1}{C_2} = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$

कमी = 1

कमी % = $\frac{\text{कमी}}{\text{मूल}} \times 100 = \frac{1}{5} \times 100 = 20\%$

10.2; लघु विधि:-

- 25% + 30% + (-25%) of (30%)

5% - 7.5% = 2.5% कमी

10.2; माना की चीजों का मूल्य ₹100 हे। और प्रत्येक दिन का विक्रय मूल्य 100 इकाई है।

$\therefore$ कर/ दिन = 100 × 100 = ₹10000

स्थिति -II

नए चीज = 75 × 130 = ₹9750

कमी = ₹(10000 – 9750) = ₹250

$\therefore$ कमी % = $\frac{250}{10000} \times 100 = 2\frac{1}{2}\%$

10.2; पैरामाउंट विधि:-

मूल्य (₹)	× मात्रा(कि०ग्रा०)	= खर्च (₹)
10	10	= 100
↓ (-25%)	↓ (+30%)	↓ (- ₹2.5)
7.5	× 13	= 97.5

अपेक्षित % = $\frac{-2.5}{100} \times 100 = 2\frac{1}{2}$ %(कम)

10.2; पैरामाउंट विधि:-2

माना की, प्रत्येक दिन का विक्रय ₹100

इसलिए , $100 \times \frac{75}{100} \times \frac{130}{100} = 97.5$

मतलब:-

100 ⇔ 97.5

कमी 2.5%

11.3; लघु विधि:-

x	y
125	100

अंतर 25

$\frac{25}{125} \times 100 = 20\%$

दूसरी विधि:-

$x = \frac{125}{100}y = \frac{5}{4}y \Rightarrow y = \frac{4}{5}x$

इसका मतलब, जब $x = 5$, $y = 4$

$\therefore$ अपेक्षित % = $\frac{1}{5} \times 100 = 20\%$

12.1; लघु विधि:-

+ 20 - 20% + (20%) का (-20%)

= - 4%

$\therefore$ क्रय मूल्य = 75 का 4%

75 = 75 - 3 = ₹72

12.1; पैरामाउंट विधि:-

$\frac{20^2}{100} \Rightarrow 4\%$ कम

तो ⇒ $\frac{75 \times 96}{100} = 72$

12.1; पैरामाउंट विधि:-2

75 —(+ 20%)→ 90 —(- 20%)→ 72/-

i.e. $\frac{120}{100} \times 75$ $= \frac{80}{100} \times 90$

12.1; कमी = $\left(20 - 20 - \frac{20 \times 20}{100}\right)\% = -4\%$

$\therefore$ वस्तु का वर्तमान मूल्य = ₹ 75 का 96%

$= \frac{75 \times 96}{100} = ₹\ 72$

Scanned by CamScanner

12.1; पैरामाउंट विधि:-

$20\% (\uparrow) \Rightarrow \frac{1}{5}$; $20\% (\downarrow) = \frac{1}{5}$

मूल : नया

5 → 6 → जब 20% बढ़ाते हैं तो 5, 6 हो जाता है।

5 → 4 → जब 20% कम करते हैं तो 5 4 हो जाता है।

25 24

×3↓ ↓×3

75 (दिया है।) ₹ 72

(25 को 3 से गुणा करने पर 75 मिलता है।)

इसलिए 24 को भी 25 से गुणा करेंगे।

13.2; माना की उसकी मासिक आय ₹ x

घरेलू चीजों पर खर्च = ₹ $\frac{x}{2}$

शेष खर्च राशि = $\frac{x}{2}$ का 85%

बचत ⇒ $\frac{x}{2}$ का 15% = 900

$$\Rightarrow x = \frac{900 \times 2 \times 100}{15}$$

$$\Rightarrow x = ₹\ 12000$$

13.2; पैरामाउंट विधि:-

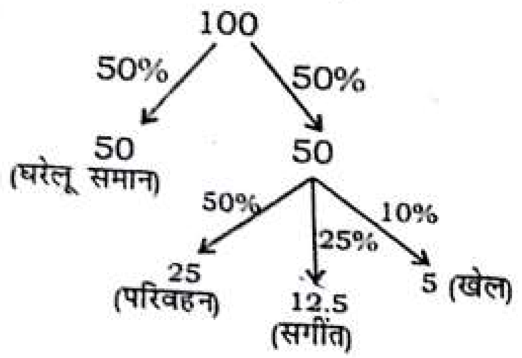
अप्रत्यक्ष विधि:-

इसलिए, $900 \times \frac{100}{(100-50)} \times \frac{100}{100-(50+25+10)}$

$900 \times \frac{100}{50} \times \frac{100}{15} = ₹\ 12000$

13.2; पैरामाउंट विधि:-2

माना की आय ₹ 100 है।



शेष = आय - सभी खर्च

100 -(50 + 25 + 12.5 + 5)

= ₹ 7.5

↓ × 120 (गुणा)

₹ 900 (दिया है।)

∴ आय = ₹ 100 × 120 = ₹ 12000

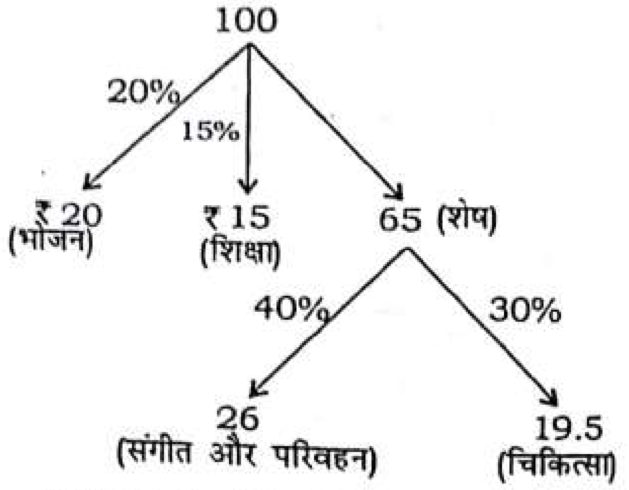
7.5 का 120 से गुणा करके 900 होता है, इसलिए आय को भी 120 से गुणा करते हैं।

14.5; लघु विधि:-

65% का 30% = 8775 ⇒ 100%

$$= \frac{8775 \times 100 \times 100}{30 \times 65} = ₹\ 45,000$$

दूसरी विधि:- माना की उसकी आय ₹100 है।



बचत = 100 - 20 - 15 - 26 - 19.5

= ₹ 19. 5

↓ × 450 (गुणा)

₹ 8775 (दिया है।)

∴ आय = ₹ 100 × 450 = ₹ 45000

(आय मूल भिन्न के लिए,100 को 450 से गुणा करेंगे।)

15.2; माना की भिन्न = $\frac{x}{y}$

अब, $\frac{x + \frac{200}{100} \times x}{y + \frac{350}{100} \times y} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{\frac{300x}{100}}{\frac{450y}{100}} = \frac{5}{12}$

$\frac{30x}{45y} = \frac{5}{12} \Rightarrow \therefore \frac{x}{y} = \frac{5 \times 45}{12 \times 30} = \frac{5}{8}$

Scanned by CamScanner

15.2; पैरामाउंट विधिः-

माना की मूल भिन्न $\frac{x}{y}$ है।

$$\frac{x\times(100+200)\%}{y\times(100+350)\%}=\frac{5}{12}$$

$$\frac{x\times300}{y\times450}=\frac{5}{12}\text{ , तो }\frac{x}{y}=\frac{5}{8}$$

16.4; $\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{3}{5}\times x=504$

$$x=3500$$

$$\therefore\ \frac{1}{4}\times\frac{2}{5}\times3500=350$$

नोटः- $40\%=\frac{4}{10},\quad 60\%=\frac{6}{10}, 25\%=\frac{1}{4}$

17.5; प्रश्नानुसार = (40 प्रश्न का $x\%$) + (40 प्रश्न का 65 % हो चुका है) = 80 प्रश्न का 75%

$$\frac{x}{100}\times40+\frac{65}{100}\times40=\frac{75}{100}\times80$$

$$\frac{40x+2600}{100}=\frac{6000}{100}$$

$$40x+2600=6000$$

$$40x=3400$$

$$x=\frac{3400}{40}=85\%$$

दूसरी विधिः-

40 प्रश्न का 65% = $\frac{65}{100}\times40=26$ प्रश्न

चूंकि उसने 26 अंक प्राप्त किए।

परन्तु उसे 80 का 70% अंक की जरूरत है।

$=\frac{75}{100}\times80=60$ अंक

$\therefore$ अपेक्षित अंक = 60 - 26 = 34 अंक

अब, $x\%$ of 40 = 34

$$\Rightarrow x=\frac{34\times100}{40}=85\%$$

18. 1; माना की भिन्न = $\frac{x}{y}$ है।

$$=\frac{x+2x}{y+4y}=\frac{21}{20}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$$

19.5; लघु विधिः-

$$\frac{35}{100}\times\frac{42}{100}\times\frac{6}{7}\times500=63$$

20.3; लघु विधिः-

65 × 65 का 20% + 4 × 65 का 40%

= 65 × 13 + 4 × 26 = 949

दूसरी विधिः-

प्रत्येक छात्रक को $=\frac{20}{100}\times65$ मिठाई मिलती है।

=13 मिठाई

प्रत्येक शिक्षक को $=\frac{40}{100}\times65$ मिठाई मिलती है।

= 26 मिठाई

$\therefore$ मिठाई की संख्या = $\left(\underbrace{65\times13}_{\text{छात्रों की संख्या}}\right)+\left(\underbrace{4\times26}_{\text{शिक्षकों की संख्या}}\right)$

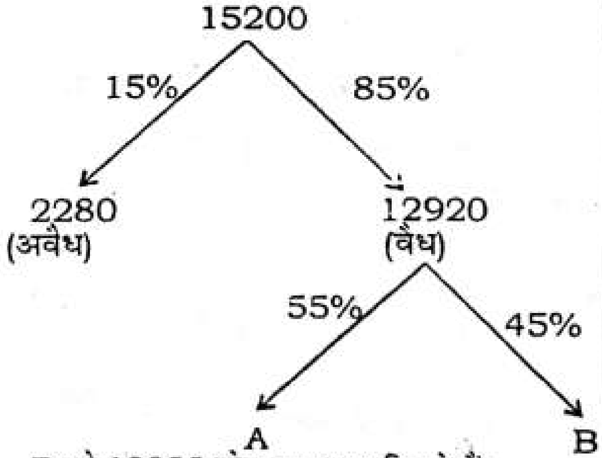
= 949

21.4; लघु विधिः-

वैध वोट = $\frac{85}{100}\times15200=12920$

वैध वोट का 45% = $\frac{45}{100}\times12920=5814$

21.4; पैरामाउंट विधिः-



B को 12920 वोट का 45% मिलते हैं।

$=\frac{45}{100}\times12920=5814$ वोट

Scanned by CamScanner

22.2; लघु विधि:-

$$\frac{15}{100}\times\frac{45}{100}\times x = 105.3 \Rightarrow x = 1560$$

$$\frac{24}{100}\times 1560 = 374.4$$

23.1; माना की पूर्णांक = $\frac{x}{y}$ है।

$$\frac{x+\frac{220}{100}\times x}{y+\frac{150}{100}\times y} \Rightarrow \frac{3.20x}{2.50y} \Rightarrow \frac{32x}{25y} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{8}$$

24.2; पैरामाउंट विधि:-

250 का 60% = 150

$$\therefore 150 - \frac{40}{100}\times 125 = 100$$

$$= \frac{100}{125}\times 100 = 80\%$$

24.2; पहली विधि:-

कुल सही प्रश्न की संख्या 60% अंक पाने के लिए

$$= \frac{60}{100}\times 250 = 150$$

125 का 40% = 50 प्रश्न

∴ x% का 125 = 150 – 50

= 100 प्रश्न

$$\Rightarrow x = \frac{100}{125}\times 100 = 80\%$$

अपेक्षित% = 80%

दूसरी विधि:-

प्रश्नानुसार-

125 का 40% + 125 का x% = $\frac{60}{100}\times 250$

$$\frac{40}{100}\times 125 + \frac{x}{100}\times 125 = \frac{60\times 250}{100}$$

$$5000 + 125x = 15,000$$

$$125x = 10,000$$

$$x = \frac{10,000}{125}$$

$$= \frac{400}{5} = 80\%$$

25.3; लघु विधि:-

$$\frac{27}{100}\times\frac{36}{100}\times\frac{5}{9}\times 4500 = 243$$

26.1; माना की पूर्णांक $\frac{x}{y}$ है।

$$\therefore \frac{x+3x}{y+y} = \frac{30}{19}$$

$$\therefore 76x = 60y$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{60}{76} = \frac{15}{19}$$

27.2; माना की संख्या x है।

$\therefore x$ का $\frac{5}{6}$ = 720

$$\therefore x = 720\times\frac{6}{5} = 864$$

$$\therefore \frac{45}{100}\times 864 = 388.8$$

28.5; लघु विधि:-

35 × 35 का 20% + 6 × 35 का 40%

= 245 + 84 = 329

29.1; $\frac{1}{3}x = 96 \Rightarrow x = 288$

$$\frac{67}{100}\times 288 = 192.96$$

30.5; लघु विधि:-

माना की मूल भिन्न = $\frac{x}{y}$ है।

$$\frac{40x}{25y} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{8}$$

Scanned by CamScanner

30.5; माना की भिन्न $\frac{x}{y}$

$\because \frac{x+3x}{y+1.5y}=\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{4x}{2.5y}=\frac{3}{5}$

$\therefore \frac{x}{y}=\frac{3}{4}\times\frac{2.5}{4}=\frac{3}{8}$

31.1; लघु विधि:-

द्विघातिय समीकरण के जगह वैकल्पिक विधि का प्रयोग करें

द्वारा	अदला-बदली करने पर	अंतर
24	42	18
39	93	54

$\therefore$ संख्या 39 है। 39 का 40 = 15.6

31.1; संख्या:- $10x + y$ (दहाई स्थान के अंक को 10 से गुणा करें। उदाहरण 53 =50 + 3 या 10 × 5 + 3)

(xy का मतलब $10x + y$)

प्रश्नानुसार

$10x + x^2$

$\therefore (10x + x^2) - (10x^2 + x) = 54$

$\therefore 9x^2 - 9x = 54$

$\therefore x^2 - x - 6 = 0$

$\therefore (x - 3)(x + 2) = 0$

$\therefore x = 3$

$\therefore x = -2$

$\therefore$ मूल संख्या = $10x + x^2$ है।

$= 10 \times 3 + 3^2$

$= 30 + 9$

$= 39$

$\therefore$ संख्या का 40% = $\frac{40}{100}\times 39 = 15.6$

32.2; लघु विधि:-

+ 15% - 10% + (+ 15%) का (-10%)

+ 5 % - 1.5 = 3.5% (बढत)

दूसरी विधि:-

$H_1 = 100$ $H_2 = 115$

$R_1 = 100$ $R_2 = 90$

पृष्ठ क्षेत्रफल = πrh

$\pi R_1 H_1$ $\pi R_2 H_2$

$\Rightarrow 100 \times 100$ $\Rightarrow 115 \times 90$

$\Rightarrow 10,000$ $\Rightarrow 10350$

$\Rightarrow 200$ $\Rightarrow 207$

बढत = 207 - 200 = 7

बढत % = $\frac{\text{बढत}}{\text{मूल}}\times 100$

$= \frac{7}{200}\times 100 = 3.5\%$

तीसरी विधि:-

$15\% = \frac{3}{20}$

	पुराना	:	नया
h	20	→	23

$10\% = \frac{1}{10}$

	पुराना	:	नया
r	10	→	9
(पृष्ठ क्षेत्रफल)	पुराना	:	नया
(rh)	20	→	23
	×10	→	×9
	200		207

बढत % = $\frac{7}{200}\times 100 = 3.5\%$

33.2; लघु विधि:-

राजू 100 —(+25)→ रवि 125

-25

$\therefore \frac{25}{125}\times 100 = 20\%$

दूसरी विधि:-

रवि = $\frac{125}{100}$ × राजू = $\frac{5}{4}$ × राजू

इसका मतलब यदि राजू की वेतन ₹ 4 है, तो रवि का वेतन ₹ 5 है।

उनका अपेक्षित % = $\frac{5-4}{5}\times 100 = 20\%$

Scanned by CamScanner

तीसरी विधि:-

$$25\% = \frac{1 \rightarrow \text{बढ़त}}{4 \rightarrow \text{राजू}}$$

रवि : राजू
5 : 4

$$\% = \frac{5-4}{5} \times 100 = 20\%$$

34.1; लघु विधि:-

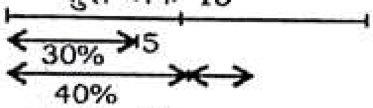
यदि 30% अंक वाले 5 अंक से अनुत्तीर्ण होते हैं। और 40% अंक वाले उत्तीर्ण अंक से 10 अंक अधिक पाते हैं।

40% - 30% = 5 + 10 =15

10% = 15 अंक ⇒ कुल अंक 100% = 150

उत्तीर्ण अंक = 30% का 150 + 5 = 50

34.1; पैरामाउंट विधि:-



10% = 15
100% = 150

$$\text{उत्तीर्ण अंक} \Rightarrow \frac{150 \times 30}{100} + 5 = 50$$

34.1; माना की कुल अंक x हैं।

प्रश्नानुसार:-

$$\frac{30}{100} \times x + 5 = \frac{40}{100} \times x - 10$$

$$\frac{30x + 500}{100} = \frac{40x + 1000}{100}$$

$$10x = 1500$$

$$x = 150$$

उत्तीर्ण अंक = x का 30%

$$= \frac{30}{100} \times 150 + 5 = 50 \text{ अंक}$$

35.3; लघु विधि:-

25% (केवल अंग्रेजी) + (दोनों) 60 का 35%

60 का 60% = 36

35. 3; छात्रों की संख्या जो बोल सकते हैं।

$$\text{केवल हिन्दी} = \frac{40}{100} \times 60 = 24$$

$$\text{केवल अंग्रेजी} = \frac{25}{100} \times 60 = 15$$

दोनों भाषाएं = 60 – (24 + 15)
= 21

∴ छात्रों की संख्या जो अंग्रेजी बोल सकते है।:-
= 15 + 21
= 36

36.4; लघु विधि:-

शेष = 20% = 500

कुल = 100% = 2500

36. 4; शेष किताबों का प्रतिशत = 100 – (30 + 50)
= 20

प्रश्नानुसार:-

कुल किताबों का 20% = 500

∴ कुल किताब = 100%

$$= \frac{100 \times 500}{20} = 2500$$

37.2; लघु विधि:-

(8 ×100) का 55% = 440

अंग्रेजी = 440 का 15%
= 66

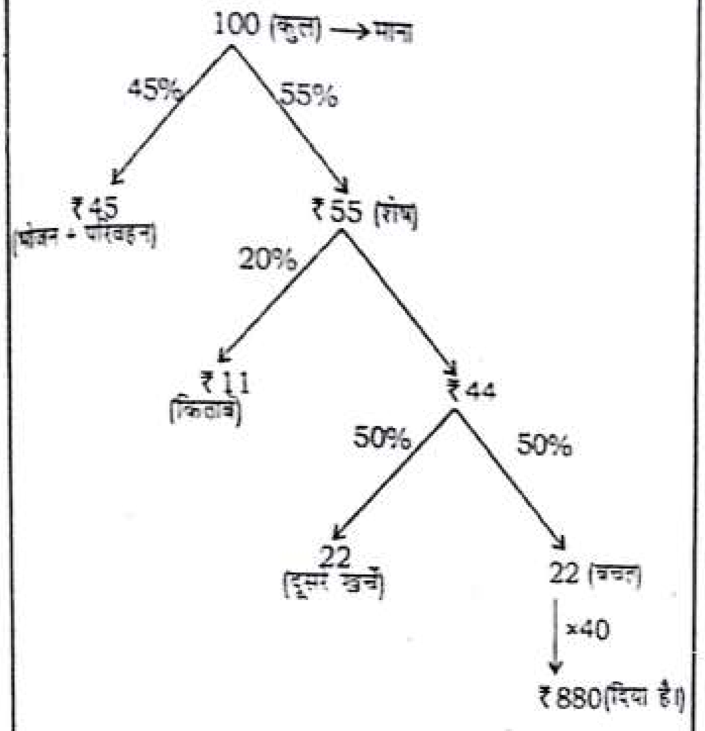
37.2; कुल अंक = 55 × 8
= 440

अंग्रेजी में अंक = 440 का 15%

$$= \frac{15}{100} \times 440 = 66$$

Scanned by CamScanner

38.5; पैरामाउंट विधिः-



∴ आय = ₹ 100 × 40 = ₹ 4000

चूंकि 22 को जब 40 से गुणा करते हैं, तो 880 होता है, इसलिए आय को भी 40 से गुणा करते हैं।

39. 4; माना की संख्या x है।

अब, प्रश्नानुसार

x का 65% − x का 36% = 58

या, x का (65% − 36%) = 58

या, x का 29% = 58

या, $x = \frac{58 \times 100}{29} = 200$

अब, संख्या का 23% = 200 का 23% = 46

40.3; वह खर्च करता है = 40% + 20% + 50% शेष

का = 40% + 20% + $\frac{50}{100}$ × 40%

40% + 20% + 20% = 90%

बचत = 10%

10% = 450/-

100% = 4500/-

41.2; लघु विधिः-

15% = ₹ 11250

कुल राशि = 100%

$= \frac{11250}{15} \times 100$ = ₹ 75000

41. 2; माना की उसके पास = ₹ 100/-

पत्नी के पास = ₹ 35/-

पुत्र के पास = ₹ 50/-

उसकी बचत = 100 - (35 + 50)

= 100 - 85 = 15/-

यदि 15/- = 11250

तो, 100/- = $\frac{100 \times 11250}{15}$ = ₹ 7500/-

42.2; पैरामाउंट विधिः-

$50\% = \frac{1}{2}$; $60\% = \frac{3}{5}$

	पुराना		नया
r	2	$\xrightarrow{-1}$	1
h	5	$\xrightarrow{+3}$	8

आयतन:-	पुराना	नया
(r^2h)	r = 2	1
	r = 2	1
	h = ×5	×8
	20	8

अपेक्षित % = $\frac{20-8}{20} \times 100 = 60\%$

42.2; पैरामाउंट विधिः-2

माना की वेतन का मूल्य आयतन 100

तो, $100 \times \frac{50}{100} \times \frac{50}{100} \times \frac{160}{100}$

= 40

100 ⟶ 40

इसलिए, कमी = 60%

42.2; दूसरी विधिः-

मूल आयतन = $\pi \times 2 \times 2 \times 5 = 20\pi$

नया आयतन = $\pi \times 1 \times 1 \times 8 = 8\pi$

कमी % = $\frac{\text{कमी}}{\text{मूल}} \times 100$

$= \frac{12\pi}{20\pi} \times 100 = 60\%$

Scanned by CamScanner

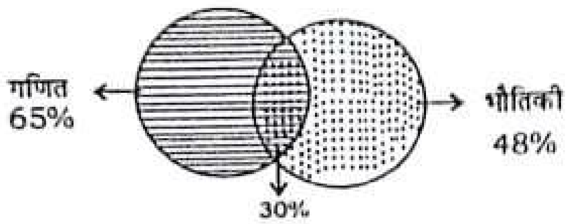
43.1; n(M) = 65, n(P) = 48, n (M ∩ P) = 30

$\therefore$ n(M ∪ P) = n(M) + n(P) − n(M ∩ P)
= 65 + 48 − 30 = 83

$\therefore$ पास हुए छात्रों का प्रतिशत = 83

$\therefore$ फेल हुए छात्रों का प्रतिशत = 17

दूसरी विधि:-



केवल गणित = 65 - 30 = 35%
केवल भौतिक = 48 - 30 = 18%
दोनों = 30%
दोनों में फेल = 100 -(35 + 18 + 30)
= 100 - 83 = 17%

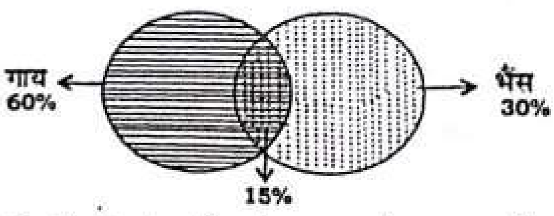
43;1 लघु विधि:-

गणित = + 65%
भौतिक = + 48%
दोनों = − <u>30</u>
कुल पास = <u>83%</u>
कुल फेल = 17%

44.2; लघु विधि:-

परिवारों के पास गाय है = + 60%
परिवारों के पास भैंस है = + 30%
परिवारों के पास दोनों हैं = − <u>15%</u>
<u>75%</u>
परिवारों के पास न तो गाय है न ही भैंस है
= 96 का 25% = 24

दूसरी विधि:-



परिवारों की संख्या जिनके पास या तो एक गाय है या एक भैंस = 60 + 30 - 15
= 75%

परिवारों की संख्या जिनके पास न तो गाय है और न भैंस है:- = 100 - 75% = 25%

अपेक्षित संख्या = $\frac{25}{100} \times 96 = 24$

45.1; यदि कोई संख्या दूसरी संख्या से x% अधिक है, तो दूसरी संख्या पहली संख्या से $\frac{x}{100 + x} \times 100\%$ कम है

$\therefore$ अपेक्षित संख्या = $\frac{500}{100+500} \times 100$

$= \frac{500}{600} \times 100 = \frac{250}{3} = 83\frac{1}{3}\%$

45.1; लघु विधि:-

P Q
6 1
-5

$\therefore \frac{5}{6} \times 100 = 83\frac{1}{3}\%$

46.3; लघु विधि:-

+ 20% - 20% + (+20%) of (-20%)
= - 4%

46.3;पैरामाउंट विधि:-

मूल्य (₹) ×	मात्रा(कि०ग्रा०) =	खर्च (₹)
पुराना10 ×	10 =	100
↓ + 20%	↓ -20%	↓ - 4₹
नया 12 ×	8 =	96

अपेक्षित % = $\frac{-4}{100} \times 100 = -4\%$(कम)

46.3; पैरामाउंट विधि:-2

$\frac{20^2}{100}$ कम ⇒ 4%

Scanned by CamScanner

47.3; 19% आयकर = 1% आय

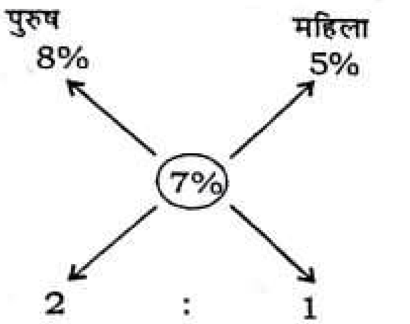
$$\frac{\text{आय कर}}{\text{आय}} = \frac{1}{19} = 5\%$$

48.3; **पैरामाउंट विधिः-**

जनसंख्या में वृद्धि %

$$= \frac{10272 - 9600}{9600} \times 100 = \frac{672}{96} \times 100$$

$$= 7\%$$



पुरुषों की संख्या = $\frac{2}{3} \times 9600 = 6400$

49;4 **लघु विधिः-**

$$\frac{5}{3} - \frac{3}{5} = \frac{16}{15} \Rightarrow \%\ \text{त्रुटि}$$

$$= \frac{\text{त्रुटि}}{\text{मूल}} \times 100$$

$$= \frac{16/15}{5/3} \times 100 \Rightarrow \frac{16 \times 3}{15 \times 3} \times 100 = 64\%$$

दूसरी विधिः-

माना की संख्या N है।

$$\text{त्रुटि } \% = \frac{\frac{5}{3}N - \frac{3}{5}N}{\frac{5}{3}N} \times 100$$

$$= \frac{16N \times 3}{15 \times 5} \times 100 = 64\%$$

50.2; विद्यार्थियों का 40% = 972 (लड़कियाँ)

$\therefore$ विद्यार्थियों का 60% = $\frac{60 \times 972}{40} = 1458$

अथवा

40% = 972

$$\therefore 60\% = \frac{60 \times 972}{40} = 1458$$