अनुपात एवं समानुपात
(Ratio and Proportion)

जब कभी यह कहा जाता है कि रेखा AB की लंबाई 5 सेंटी मीटर है, तो इसका मतलब है कि लंबाई का मात्रक सेंटी मीटर, AB रेखा में 5 बार सम्मिलित है। यदि दो रेखाएँ AB एवं CD की लंबाई क्रमशः 2 एवं 3 सेंटी मीटर हो तो कहा जाता है कि AB की लंबाई CD की लंबाई का $\frac{2}{3}$ है।

***अनुपात* (Ratio):** यदि दो राशियाँ एक ही किस्म की हों तो एक राशि में दूसरी राशि जितनी बार समाहित होती है, उसे उन दो राशियों का अनुपात कहते हैं।

स्पष्टतः, दो राशियों का अनुपात वह भिन्न है, जिसके द्वारा एक राशि के पदों में दूसरी राशि को अभिव्यक्त किया जा सकता है।

इस बात का ध्यान रखें कि दोनों राशियाँ एक ही किस्म की हों। 20 रु. एवं 30 रु. का अनुपात निकाला जा सकता है पर 20 रु. एवं 30 आम का अनुपात नहीं निकाला जा सकता।

2 और 3 के अनुपात को 2 : 3 या $\frac{2}{3}$ लिखा जाता है तथा (:) के चिह्न को 'इज टू' (is to) पढ़ा जाता है। 2 एवं 3 अनुपात के पद (terms of the ratio) कहे जाते हैं। 2 पहला पद है एवं 3 दूसरा पद।

अनुपात का पहला पद, पूर्व पद (antecedent) कहलाता है तथा दूसरे पद को अंतिम पद (consequent) कहते हैं।

अनुपात 2:3 में 2 पूर्व पद (antecedent) एवं 3 अंतिम पद (consequent) हैं।

'antecedent' का शाब्दिक अर्थ है 'पूर्ववर्त्ती' तथा consequent का शाब्दिक अर्थ है अनुवर्त्ती'। चूँकि किसी निश्चित राशि को उसी किस्म की दूसरी राशि से विभाजित करने पर जो भागफल प्राप्त होता है, उसमें किसी मात्रक का अभाव होता है, इसलिए दो निश्चित राशियों के बीच का अनुपात एक निरपेक्ष संख्या (abstract number) है। उदाहरण के लिए 5 रु. एवं 7 रु. के बीच का अनुपात 5 : 7 है।

यदि किसी भिन्न के अंश एवं हर दोनों में समान संख्या से गुणा किया जाए या विभाजित किया जाए तो उसका मान अपरिवर्तित रहता है। इसी तरह किसी अनुपात (जो कि एक भिन्न ही है) के दोनों पदों में समान संख्या से गुणा करने या भाग देने पर वह अनुपात अपरिवर्तित रहता है।

उदाहरण के लिए,

3 : 5 = 6 : 10 एवं 15 : 20 = 3 : 4

मिश्रित अनुपात (Compound Ratio)

परिभाषा: दो या दो से अधिक अनुपात के पूर्व पदों के गुणनफल तथा अंतिम पदों के गुणनफल से बने नए अनुपात को मिश्रित अनुपात कहते हैं।

उदा. निम्नलिखित चार अनुपातों का एक मिश्रित अनुपात प्राप्त करें:
$4:3, 9:13, 26:5, 2:15$

हल: अभीष्ट अनुपात $= \frac{4\times9\times26\times2}{3\times13\times5\times15} = \frac{16}{25}$

परिभाषा: जब अनुपात 4 : 3 को स्वयं उसी के साथ मिश्रित किया जाता है तो परिणामी अनुपात के रूप में $4^2 : 3^2$ प्राप्त होता है। इसे वर्गानुपात (duplicate ratio) कहते हैं।

इसी तरह $4^3 : 3^3$ को 4 : 3 का तिहरा अनुपात (triplicate ratio) कहा जाता है।

$\sqrt{4} : \sqrt{3}$ को 4 : 3 का आधा अनुपात (subduplicate ratio) कहा जाता है।

$\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{3}$ को 4 : 3 का तिहाई अनुपात (subtriplicate ratio) कहते हैं।

***विलोम अनुपात* (Inverse Ratio):** यदि प्रदत्त अनुपात 2 : 3 हो तो उसका विलोम अनुपात है $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3:2$ अर्थात् किसी अनुपात के पदों को पलट देने पर जो नया अनुपात प्राप्त होता है उसे विलोमानुपात या व्युत्क्रम अनुपात (inverse ratio या reciprocal ratio) कहते हैं।

यदि पूर्व पद = अंतिम पद तो अनुपात को समान अनुपात (ratio of equality) कहते हैं। जैसे, 3 : 3।

यदि पूर्व पद > अंतिम पद तो अनुपात को महत्तर असमानता का अनुपात (ratio of greater inequality) कहते हैं, जैसे 4 : 3।

यदि पूर्व पद < अंतिम पद तो अनुपात को लघुत्तर असमानता का अनुपात (ratio of less inequality) कहते हैं, जैसे 3 : 4।

उदा. 1: 1458 को दो ऐसे हिस्सों में विभाजित करें, ताकि एक हिस्सा दूसरे का 2:7 हो।

हल: पहला हिस्सा $= 2\times\frac{1458}{2+7} = 2\times\frac{1458}{9} = 324$; दूसरा हिस्सा $= 7\times\frac{1458}{9} = 1134$

उदा. 2: तीन ऐसी संख्याएँ प्राप्त कीजिए जो आपस में 1:2:3 के अनुपात में हों तथा उनके वर्ग का योग 504 के बराबर हो।

हल: मान लिया कि संख्याएँ x, 2x एवं 3x हैं।

प्रश्नानुसार, $x^2 + (2x)^2 + (3x)^2 = 504$ या, $14x^2 = 504 \quad \therefore \; x = 6$

अभीष्ट संख्याएँ = 6, 12 एवं 18

उदा. 3: A, B, C, D एक ही किस्म की चार राशियाँ हैं और $A:B = 3:4, B:C = 8:9, C:D = 15:16$
तो i) $A:D = ?$ ii) $A:B:C:D = ?$

हल: i) $\frac{A}{B} = \frac{3}{4}, \frac{B}{C} = \frac{8}{9}, \frac{C}{D} = \frac{15}{16}$

$\therefore \quad \frac{A}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \times \frac{C}{D} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{15}{16} = \frac{5}{8}$

$\therefore$ A : D = 5 : 8

ii) पहले अनुपात की यथास्थिति बनाए रखें तथा दूसरे अन्य अनुपातों के पदों में इस प्रकार का परिवर्तन लाएँ कि एक का अंतिम पद अपने बाद वाले अनुपात के पूर्व पद के बराबर हो जाए।

A : B = 3 : 4 .....(1)

B : C = 8 : 9 .....(2)

$= 1 : \frac{9}{8}$ (8 से भाग देने पर)

$= 4 : \frac{9}{8} \times 4$ (4 से गुणा करने पर)

$= 4 : \frac{9}{2}$ .....2(i)

C : D = 15 : 16 .....(3)

$= 1 : \frac{16}{15}$ (15 से भाग देने पर)

$= \frac{9}{2} : \frac{16}{15} \times \frac{9}{2}$ ($\frac{9}{2}$ से गुणा करने पर)

$= \frac{9}{2} : \frac{24}{5}$ .....3(i)

$\therefore$ A : B : C : D $= 3 : 4 : \frac{9}{2} : \frac{24}{5} = 30 : 40 : 45 : 48$

नोट:* *1. समीकरण (2) में B = 8 है। अनुपात को समतुल्य बनाने के लिए (2) के 8 को घटाकर 4 करना होगा क्योंकि (1) में B = 4 है।

2. समीकरण (3) में C = 15 है अनुपातों को समतुल्य बनाने के लिए (3) के 15 को घटाकर $\frac{9}{2}$ करना होगा क्योंकि 2(i) में $C = \frac{9}{2}$ है।

उदा. 4: यदि A : B = 1 : 2, B : C = 3 : 4, C : D = 6 : 9 एवं D : E = 12 : 16 हो तो A : B : C : D : E का मान निकालें।

हल: A : B = 1 : 2 = 3 : 6

B : C = 3 : 4 = 6 : 8

C : D = 6 : 9 = 8 : 12

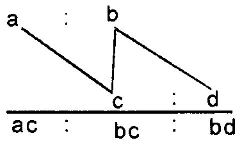
D : E = 12 : 16

$\therefore$ A : B : C : D : E = 3 : 6 : 8 : 12 : 16

नोट: उपर्युक्त उदाहरण में हमने नीचे से गणना शुरू की है क्योंकि इससे सवाल का हल आसान हो जाता है।

प्रमेय : यदि पहली एवं दूसरी राशियों के बीच का अनुपात $a : b$ हो तथा दूसरी एवं तीसरी राशियों के बीच्र का अनुपात $c : d$ हो, तो पहली, दूसरी एवं तीसरी राशियों के बीच का अनुपात ac :bc: bd होगा।

उपर्युक्त अनुपात को निम्नलिखित तरीके से दर्शाया जा सकता है।



प्रमाण: पहला : दूसरा $= a : b$ एवं

दूसरा : तीसरा $= c : d$

दोनों अनुपातों को समतुल्य करने के लिए, हमें पहला अनुपात का अंतिम पद (b) एवं दूसरा अनुपात का पहला पद (c) को समतुल्य बनाना होगा। इसलिए हम पहला अनुपात को c से तथा तीसरा अनुपात को b से गुणा करते हैं।

इस प्रकार,

पहला : दूसरा = ac : bc

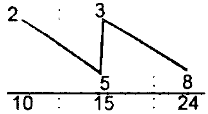
दूसरा : तीसरा = bc : bd

$\therefore$ पहला : दूसरा : तीसरा = ac : bc : bd

उदा. 5: तीन संख्याओं का योग 98 है। यदि पहली एवं दूसरी संख्या का अनुपात 2:3 हो तथा दूसरी एवं तीसरी संख्या का अनुपात 5:8 हो तो दूसरी संख्या ज्ञात करें।

हल: उपर्युक्त प्रमेय से सीधा दूसरी संख्या ज्ञात नहीं की जा सकती है परंतु हम तीनों संख्याओं के अनुपात को ज्ञात कर सकते हैं।

तीनों संख्याओं के अनुपात



$$\therefore \text{ दूसरी संख्या } = \frac{98}{10+15+24} \times 15 = 30$$

उदा. 6: रीता एवं सीता के धनों का अनुपात 7 : 15 है एवं सीता एवं कविता के धनों का अनुपात 7:16 है। यदि रीता के पास 490 रु. हो तो कविता के पास कितना धन है?

हल: रीता : सीता : कविता

7	:	15		
		7	:	16
49	:	105	:	240

रीता, सीता एवं कविता के धनों का अनुपात = 49 : 105 : 240

प्रश्नानुसार, हम देखते हैं कि,

49 ≡ 490 रु. ∴ 240 रु. ≡ 2400

प्रमेय: यदि पहली एवं दूसरी राशि के बीच का अनुपात $a:b$ हो, दूसरी एवं तीसरी राशि के बीच का अनुपात $c:d$ हो तथा तीसरी एवं चौथी राशि के बीच का अनुपात $e:f$ हो तो पहली, दूसरी, तीसरी एवं चौथी राशियों का अनुपात निम्नलिखित होगा।

पहला : दूसरा =	a	:	b				
दूसरा : तीसरा =			c	:	d		
तीसरा : चौथा =					e	:	f

पहला : दूसरा : तीसरा : चौथा = ace : bce : bde : bdf

प्रमाण: इसका प्रमाण पिछले प्रमेय के जैसा ही आसानी से किया जा सकता है।

उदा. 7: यदि A : B = 3 : 4, B : C = 8 : 10 एवं C : D = 15 : 17 हो तो । A : B : C : D ज्ञात करें।

हल: A : B = 3 : 4

B : C = 9 : 10

C : D = 15 : 17

A : B : C : D = 3 × 8 × 15 : 4 × 8 × 15 : 4 × 10 × 15 : 4 × 10 × 17

= 9 : 12 : 15 : 17

नोट: 1. उदा.-3 को उपर्युक्त प्रमेय के सहारे हल किया जा सकता है।

2. यदि A : B = 1 : 2, B : C = 3 : 4, C : D = 2 : 3 एवं D : E = 3 : 4 हो तो A : B : C : D : E ज्ञात करें।

हल:

A : B =	1	:	2					
B : C =			3	:	4			
C : D =					2	:	3	
E : E =							3	: 4

A : B : C : D : E = 1 × 3 × 2 × 3 : 2 × 3 × 2 × 3 : 2 × 4 × 2 × 3 : 2 × 4 × 3 × 3 : 2 × 4 × 3 × 4

= 3 : 6 : 8 : 12 : 16

उदा. 8: एक शिकारी कुत्ता खरगोश का पीछा करता है और जितनी देर में खरगोश 6 छलाँग लगाता है उतनी ही देर में कुत्ता 5 छलाँग लगा पाता है। लेकिन कुत्ते की चार छलाँगें खरगोश की 5 छलाँगों के बराबर है। कुत्ते एवं खरगोश के छलाँग लगाने की दर की तुलना कीजिए।

हल: कुत्ते की 4 छलाँगें = खरगोश की 5 छलाँगें

$\therefore$ कुत्ते की 5 छलाँगें = खरगोश की $\frac{25}{4}$ छलाँगें

$\therefore$ कुत्ते की दर : खरगोश की दर $= \frac{25}{4} : 6 = 25 : 24$

या,

अनुपात	कुत्ता	खरगोश
छलाँग की आवृत्ति का	5	6
छलाँग की लंबाई का	4	5

तब गति का अभीष्ट अनुपात वज्र-गुणन के अनुपात के बराबर है।

अर्थात् कुत्ते की चाल : खरगोश की चाल = $5 \times 5 : 6 \times 4 = 25 : 24$

उदा. 9: A किसी काम का एक हिस्सा 12 दिनों में संपन्न करता है। B की कार्यक्षमता A की अपेक्षा 60 प्रतिशत अधिक है तो उतने ही काम को B कितने दिनों में संपन्न करेगा?

हल:	A	:	B
कार्यक्षमता	100	:	160
दिन	160	:	100
या,	8	:	5

$\therefore$ B द्वारा लिया गया समय $= \frac{12}{8} \times 5 = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ दिन

अथवा,

B चूँकि अधिक कार्यक्षम (efficient) है। इसलिए वह अपेक्षाकृत कम समय में काम पूरा कर लेगा। इसलिए दिनों की संख्या (12) में एक ऐसे भिन्न से गुणा करना होगा, जिसका मान 1 से कम हो, और वह भिन्न है।

$\frac{100}{100+60}$ अर्थात् $\frac{100}{160}$

$\therefore$ अभीष्ट दिनों की संख्या $= 12 \times \frac{100}{160} = \frac{12 \times 5}{8} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ दिन

उदा. 10: एक व्यक्ति 12 लिटर दूध में 3 लिटर पानी मिलाता है और दूसरा 10 लिटर दूध में 4 लिटर पानी मिलाता है। दोनों प्रकार के मिश्रणों में दूध की सांद्रता (strength) का क्या अनुपात है?

हल: पहले मिश्रण में दूध की सांद्रता (strength) $= \frac{12}{12+3} = \frac{12}{15}$

दूसरे मिश्रण में दूध की सांद्रता (strength) $= \frac{10}{10+4} = \frac{10}{14}$

$\therefore$ उनकी सांद्रता (strength) का अनुपात $= \frac{12}{15} : \frac{10}{14} = 12\times14 : 15\times10 = 28 : 25$

उदा. 11: 425 रु. को 4 पुरुषों, 5 महिलाओं एवं 6 बच्चों के बीच इस प्रकार बाँटा जाता है कि एक पुरुष, एक महिला एवं एक बच्चा का हिस्सा 9 : 8 : 4 के अनुपात में हो तो महिलाओं का हिस्सा बताएँ।

हल: पुरुषों, महिलाओं एवं बच्चों के हिस्से का अनुपात $= 9\times4 : 8\times5 : 4\times6$
$= 36 : 40 : 24$

$\therefore$ 5 महिलाओं का हिस्सा (share) $= \frac{425}{36+40+24} \times 40 = 170$ रु.

$\therefore$ एक महिला का हिस्सा $= \frac{170}{5} = 34$ रु.

उदा. 12: यदि एक दर्जन दर्पण से भरा एक बक्सा गिरा दिया जाए तो निम्नलिखित में से कौन भंग दर्पण (broken mirror) एवं सलामत बचे दर्पण (unbroken mirror) के अनुपात को निर्दिष्ट नहीं करता है?

1) 2 : 1 2) 3 : 1 3) 3 : 2 4) 1 : 1 5) 7 : 5

हल: बक्से में 12 दर्पण हैं। इसलिए अनुपात के पदों का योग 12 को पूर्णतया विभाजित करना चाहिए। यहाँ $2 + 1 = 3$, 12 को पूरी तरह विभाजित करता है। इसी तरह $3 + 1 = 4$ भी 12 को पूर्णतया विभाजित करता है, पर $3 + 2 = 5$, 12 को पूर्णतया विभाजित नहीं करता।

$\therefore$ हमार सही उत्तर = (3) है।

समानुपात (Proportion)

निम्नलिखित दो अनुपातों पर विचार कीजिए:

पहला अनुपात	दूसरा अनुपात
6 : 18	8 : 24

चूँकि 6, 18 का एक-तिहाई है और 8, 24 का एक-तिहाई है, इसलिए दोनों अनुपात आपस में बराबर हैं। अनुपातों की इस समानता को ***समानुपात*** कहा जाता है।

संख्याएँ 6, 18, 8, 24 समानुपाती हैं, ऐसा कहने का विधान है। समानुपात को निम्न प्रकार से लिखा जाता है।

6 : 18 :: 8 : 24 (सिक्स 'इज टू' एटीन 'ऐज' एट इज टू ट्वेन्टी फोर)

या, $6 : 18 = 8 : 24$

या, $\frac{6}{18} = \frac{8}{24}$

6, 18, 8 एवं 24 को पद कहा जाता है। 6 पहला पद है, 18 दूसरा, 8 तीसरा एवं 24 चौथा पद है।

पहला एवं चौथा पद, (यहाँ 6 एवं 24) को अंत्य या बाह्य पद (extreme) कहा जाता है तथा दूसरे एवं तीसरे पद को मध्य पद (means या middle terms) कहा जाता है। 24 को चौथा समानुपाती (fourth proportional) कहते हैं।

1. यदि चार राशियाँ समानुपाती हों तो अंत्य या बाह्य पदों का गुणनफल मध्य पदों के गुणनफल के बराबर होता है।

मान लिया कि 3, 4, 9 एवं 12 समानुपाती हैं तो $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$

दोनों अनुपातों में 4 × 12 से गुणा करने पर, $\frac{3}{4}\times 4\times 12=\frac{9}{12}\times 4\times 12$

$\therefore\ 3\times 12=4\times 9$

2. एक ही प्रकार की तीन राशियाँ उस समय वितत समानुपात (continued proportion) कही जाती हैं जब पहले एवं दूसरे पद का अनुपात दूसरे एवं तीसरे पद के अनुपात के बराबर हो।

दूसरी राशि को पहले एवं तीसरे का मध्य समानुपाती कहा जाता है एवं तीसरी राशि को पहले एवं दूसरे का तीसरा समानुपाती कहा जाता है।

इस प्रकार 9, 6 एवं 4 वितत समानुपाती हैं क्योंकि 9 : 6 :: 6 : 4

इसलिए 9 एवं 4 का मध्य समानुपाती 6 है तथा 9 एवं 6 का तीसरा समानुपाती 4 है।

उदा. 1: 6, 8 एवं 15 का चौथा समानुपाती निकालें।

हल: यदि x चौथा समानुपाती हो तो

$6:8=15:x$

$$\therefore\quad x=\frac{8\times 15}{6}=20$$

उदा. 2: 15 एवं 20 का तीसरा समानुपाती बताएँ।

हल: यहाँ हमलोगों को 15, 20 एवं 20 का चौथा समानुपाती प्राप्त करना है। मान लिया की चौथा समानुपाती x है। तब,

$15:20=20:x$

$$\therefore\quad x=\frac{20\times 20}{15}=\frac{80}{3}=26\frac{2}{3}$$

उदा. 3: 3 एवं 75 का मध्य समानुपाती क्या है?

हल: यदि अभीष्ट मध्य समानुपाती x हो तो

$3:x::x:75$

$$\therefore\quad x=\sqrt{3\times 75}=15$$

नोट: उपर्युक्त उदाहरण से यह स्पष्ट है कि दो संख्याओं का मध्य समानुपाती उनके गुणनफल के वर्गमूल के बराबर होता है। **[*स्मरणीय*]**

समानुपात 3 : 21 :: 5 : 35 पर विचार करें। यहाँ चौथा पद तीसरे पद से बड़ा है एवं तीसरा पद दूसरे पद से बड़ा है।

अब समानुपात 21 : 9 : : 35 : 5 को लीजिए। यहाँ चौथा पद तीसरे पद से छोटा है और दूसरा पद पहले पद से छोटा है।

आप कोई भी समानुपात ले लें। आप पाएँगे कि

a) यदि चौथा पद तीसरे पद से बड़ा है तो दूसरा पद भी पहले पद से बड़ा होगा।

b) यदि चौथा पद तीसरे पद से छोटा है तो दूसरा पद भी पहले पद से छोटा होगा।

समानुपात 5 : 15 : : 8 : x पर विचार कीजिए। यहाँ पहला, दूसरा एवं तीसरा पद दिया हुआ है और हमें चौथे पद का पता लगाना है। अज्ञात पद को x से सूचित करते हैं। हमें x का पता लगाना है।

चूँकि अंत्य पदों का गुणनफल मध्यपदों के गुणनफल के बराबर होता है, इसलिए,

$$5 \times x = 15 \times 8 \;\; \therefore x = \frac{15 \times 8}{5} = 24$$

इस प्रकार चौथा पद निम्नलिखित नियम के सहारे प्राप्त किया जा सकता है।

नियम: दूसरे एवं तीसरे पद को आपस में गुणा कीजिए एवं पहले पद से भाग दीजिए।

अब हम निश्चित राशियों से युक्त कुछ उदाहरण लेंगे।

अनुलोम अनुपात* (Direct Proportion): *निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदा.: यदि 5 बॉल की कीमत 8 रु. है तो 15 बॉल की कीमत क्या होगी?

हल: स्पष्ट है कि यदि बॉल की संख्या 2, 3, 4 ... गुनी बढ़ा दी जाए, तो कीमत भी 2, 3, 4 ... गुनी बढ़ जाती है। इस प्रकार 5 बॉल 15 बॉल का वही भिन्न है जो कि 5 बॉल की कीमत 15 बॉल के कीमत की।

∴ 5 बॉल : 15 बॉल :: 8 रु. : अभीष्ट कीमत

$$\therefore \text{ अभीष्ट कीमत } = \frac{15 \times 8}{5} = 24 \text{ रु.}$$

उपर्युक्त संबंध को हम तीर के संकेत द्वारा भी प्रदर्शित कर सकते हैं एवं प्रश्न को निम्न विधि से हल कर सकते हैं।

इस विधि में राशियों को एक पंक्ति में लिखते हैं तथा जिस राशि का मान निकालना होता है उसे अंत में रखते हैं। जैसे यहाँ पर पहले बॉल लिखेंगे फिर कीमत। तत्पश्चात्, अज्ञात राशि को x मान लेते हैं और अंतिम पंक्ति (column) में तीर का चिह्न ऊपर से नीचे की ओर लगाते हैं। जैसे यहाँ पर 15 बॉल की कीमत को x रु. मानकर अंतिम पंक्ति में लिखकर वहाँ पर तीर का चिह्न लगाते हैं। उपर्युक्त क्रिया निम्निलिखित रूप में प्रदर्शित होगी।

बॉल (संख्या)	***कीमत (रुपए)***
5	8 ↓
15	x

अब दी हुई राशियों का संबन्ध ज्ञात करते हैं। जैसे यहाँ पर बॉल एवं कीमत में संबंध।

हम देख चुके हैं कि यह संबंध सीधा है। अत: पहली पंक्ति में उसी दिशा में तीर का चिह्न बनाते हैं जिस दिशा में अंतिम पंक्ति में था अर्थात् ऊपर से नीचे की ओर। इसके बाद दोनों प्रकार की राशियों के बीच समानुपात का चिह्न (::) लगा देते हैं। अब स्थिति निम्न प्रकार की होगी।

बॉल (संख्या)		***कीमत (रुपए)***
5 ↓	::	8 ↓
15		x

अब तीर के चिह्न को अनुपात में बदल देते हैं। इस क्रिया के लिए पहले तीर के पूँछ की तरफ वाली संख्या लिखते हैं, फिर (:) चिह्न लगाकर तीर के नोक की तरफ वाली संख्या लिखते हैं। अर्थात् उपर्युक्त को हम इस प्रकार लिखेंगे।

$$5 : 15 :: 8 : x$$

अब बाह्य पदों का गुणनफल तथा मध्य पदों का गुणनफल लेकर उनके बीच बराबर का चिह्न (=) लगाकर प्रश्न हल कर लेते हैं। अर्थात्

$$5 \times x = 15 \times 8 \quad \therefore x = \frac{15 \times 8}{5} = 24 \text{ रु.}$$

यहाँ ध्यान रहे कि तीर का चिह्न केवल राशियों के संबंध को प्रकट करने के लिए है। अत: तीर का चिह्न लगाते समय, राशियों के नीचे लिखी संख्याओं पर ध्यान नहीं देना चाहिए, बल्कि इन संख्याओं को नजरअंदाज करते हुए केवल ज्ञात करना चाहिए कि एक राशि को बढ़ाने पर दूसरी राशि बढ़ेगी या घटेगी। यदि बढ़ेगी तो सीधा संबंध है। नहीं तो उल्टा।

उपर्युक्त उदाहरण अनुलोम समानुपात की व्याख्या है। यहाँ दो प्रदत्त राशियाँ एक-दूसरे से इस तरह संबद्ध हैं कि यदि इनमें से एक में किसी संख्या से गुणा किया जाता है या भाग दिया जाता है तो दूसरी में भी उसी संख्या से गुणा किया जाता है या भाग दिया जाता है।

प्रतिलोम समानुपात* (Inverse Proportion): *निम्नलिखित उदाहरण देखिए

उदा० यदि 15 व्यक्ति किसी खेत को 28 दिनों में काट सकते हैं तो 10 व्यक्ति उसी खेत को कितने दिनों में काटेंगे?

हल: स्पष्ट है कि यहाँ यदि व्यक्तियों की संख्या 2, 3, 4 गुनी बढ़ा दी जाए तो दिनों की संख्या 2, 3, 4 ... गुनी कम हो जाएगी। इसलिए मनुष्य की संख्या का प्रतिलोम अनुपात, संगत दिनों के अनुपात के बराबर होता है।

$$\therefore \frac{1}{15} : \frac{1}{10} :: 28 : \text{अभीष्ट दिनों की संख्या}$$

या, 10 : 15 :: 28 : अभीष्ट दिनों की संख्या

$$\therefore \text{अभीष्ट दिनों की संख्या} = \frac{15 \times 28}{10} = 42$$

उपर्युक्त सम्बन्ध तथा क्रिया को तीर के संकेत द्वारा भी निम्न प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं। जैसा कि पहले बताया जा चुका है राशियाँ (यहाँ व्यक्ति एवं समय) को एक पंक्ति

में लिखते हैं तथा जिस राशि का मान ज्ञात करना होता है उसे अंत में लिखते हैं (यहाँ पर समय)। फिर अज्ञात राशि (यहाँ पर 10 व्यक्तियों के द्वारा खेत काटने का समय) को x मान लेते हैं। तथा अंतिम पंक्ति में ऊपर से नीचे की ओर तीर का चिह्न बना लेते हैं। अब राशियों (व्यक्ति एवं समय) का सम्बन्ध ज्ञात करते हैं जो कि उल्टा है। अत: पहली पंक्ति में, अन्तिम पंक्ति के तीर की उल्टी दिशा में (नीचे से ऊपर की ओर) तीर का चिह्न बनाते हैं। अत: उपर्युक्त समस्या में निम्नलिखित स्थिति बनेगी।

व्यक्ति (संख्या)	***समय (दिन)***
15 ↑	28 ↓
10	x

अब जैसा कि पहले बताया जा चुका है तीर की दिशा में चलकर तीर को अनुपात में परिवर्तित कर लेते हैं। इस प्रकार, उपर्युक्त को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$10 : 15 :: 28 : x$

या $10 \times x = 15 \times 28$

$$\therefore\ x = \frac{15 \times 28}{10} = 42$$

उपर्युक्त उदाहरण प्रतिलोम समानुपात (Inverse Proportion) की व्याख्या है। ऐसे समानुपात में दो राशियाँ इस प्रकार जुड़ी होती हैं कि यदि एक में किसी संख्या से गुणा किया जाए तो दूसरा उसी संख्या से विभाजित हो जाता है। इसका विलोम भी सत्य है।

मिश्र समानुपात (Compound Proportion)

जब तीन या तीन से अधिक राशियाँ इस प्रकार की हों कि किसी एक राशि का मान, शेष राशियों के मान पर आश्रित हो तो वे राशियाँ एक मिश्र समानुपात में होंगी।

स्पष्ट है कि मिश्र समानुपात में दो से अधिक राशियाँ होती हैं। मिश्रित समानुपात को दो-दो राशियों के समानुपात में विभक्त किया जा सकता है।

उदाहरणार्थ, यदि 6 मनुष्य 9 घंटा प्रतिदिन काम करके एक काम को 30 दिन में करते हैं तो 4 घंटे प्रतिदिन काम करके 27 दिन में उसी काम को कितने मनुष्य करेंगे?

यहाँ पर तीन राशियाँ हैं: मनुष्य, घंटे तथा दिन। किसी एक राशि का मान शेष दो राशियों के मान पर निर्भर करता है। अत: प्रश्न मिश्र समानुपात का है।

इस प्रश्न को तीर के संकेत द्वारा हल करने के लिए निम्नलिखित क्रिया करते हैं।

पहला चरण: सबसे पहले राशियाँ (दिन, घंटे तथा मनुष्य) को एक पंक्ति में लिखते हैं तथा जिस राशि का मान ज्ञात करना होता है उसे अन्तिम पंक्ति में (यहां पर, मनुष्य)।

दूसरा चरण: फिर अज्ञात राशि (मनुष्यों की संख्या) को x मान लेते हैं और अन्तिम पंक्ति में ऊपर से नीचे की ओर तीर का चिह्न बना लेते हैं।

तीसरा चरण: अब एक-एक राशि लेकर उसका अन्तिम राशि से सम्बन्ध ज्ञात करते हैं कि यह सम्बन्ध सीधा है या उल्टा। जब एक राशि का सम्बन्ध अन्तिम राशि के साथ निकाल रहे होते हैं तब अन्य राशियों को अचर (Constant) मान लेते हैं। यहाँ पर यदि दिन का मनुष्य

से सम्बन्ध निकालना चाहें तो घंटों को अचर मान लेंगे अर्थात् घंटों की संख्या नहीं बदलेंगे। अब हम देखते हैं कि यदि दिनों की संख्या बढ़ा दी जाए तो, उतने ही काम को उतने ही घंटे प्रतिदिन काम करने पर, कम मनुष्यों की आवश्यकता होगी अर्थात् दिन एवं मनुष्य में विलामानुपात है। अत: दिन वाली पंक्ति में उल्टा तीर (नीचे से ऊपर की ओर) बना लेंगे।

चौथा चरण: अब दिन को अचर मानकर, घंटे एवं मनुष्य में सम्बन्ध ज्ञात करेंगे। हम पाते हैं कि यदि प्रतिदिन काम करने के घंटे बढ़ा दिए जाएँ तो उतना ही काम उतने ही दिन में समाप्त करने के लिए, कम मनुष्यों की आवश्यकता होगी अर्थात् घंटे एवं मनुष्य में विलोमानुपात है। अत: घंटे वाली पंक्ति में उल्टा तीर (नीचे से ऊपर की ओर) बना लेंगे। यहाँ यह बात स्पष्ट है कि उपर्युक्त सम्बन्ध ज्ञात करने के लिए राशियों के नीचे लिखी संख्याओं का प्रयोग नहीं किया गया है।

अब उपर्युक्त सम्बन्ध निम्नलिखित रूप में प्रदर्शित किए जा सकते हैं:

दिन	***घंटे***	***मनुष्य***
30 ↑	9 ↑	6 ↓
27	4	x

अब तीर की दिशा में चलकर, तीरों को अनुपात में बदल देते हैं तथा अन्तिम पंक्ति के पहले समानुपात :: का चिह्न बना लेते हैं। इस प्रकार हम पाते हैं कि

$$\left.\begin{matrix}27:30\\4:\ 9\end{matrix}\right]::6:x$$

या $27\times4:30\times9::6:x$

या $27\times4\times x=30\times9\times6$

$\therefore\ x=\dfrac{30\times9\times6}{27\times4}=15$ मनुष्य

उदा. 1: 200 मनुष्यों की एक टुकड़ी के लिए 24 सप्ताह के लिए भोजन पर्याप्त है। पहले सप्ताह के अन्त में 80 मनुष्य सहायता के लिए और आ गए और इसलिए प्रति मनुष्य के प्रतिदिन का राशन 900 ग्राम से घटाकर 750 ग्राम कर दिया गया। बताइए कितने अधिक दिन तक वे रह सकते हैं?

हल: यहाँ पर तीन राशियां हैं: मनुष्य, राशन एवं समय। चूँकि समय निकालना है इसलिए इसको पंक्ति के अन्त में रखेंगे। अभीष्ट दिनों की संख्या x मानकर इस पंक्ति में तीर का चिह्न ऊपर से नीचे की ओर बना लेंगे। अब मनुष्यों की संख्या एवं समय में विलोमानुपात है, क्योंकि मनुष्यों की संख्या बढ़ाने पर, भोजन कम समय में समाप्त हो जायेगा। इसी प्रकार राशन की मात्रा तथा समय में भी विलोमानुपात है, क्योंकि राशन कम कर देने से भोजन अधिक समय तक चलेगा। अत: पहली दोनों पंक्तियों में तीर का चिह्न विपरीत दिशा में (नीचे से ऊपर की ओर) लगायेंगे।

यदि 80 मनुष्य और न आते तथा राशन की मात्रा न बदलती तो शेष भोजन 200 मनुष्यों के लिए 900 ग्राम राशन पर (24-1=) 23 सप्ताह के लिए पर्याप्त होता। अब मनुष्यों की संख्या $(200+80=)280$ हो जाने से तथा राशन 750 ग्राम कर देने से, माना कि शेष

भोजन x सप्ताह तक चलेगा। अतः

मनुष्य	राशन (ग्राम)	समय (सप्ताह)
200 ↑	900 ↑	23 ↓
280	750	x

$$\therefore \left.\begin{matrix} 280 : 200 \\ 750 : 900 \end{matrix}\right\} :: 23 : x$$

या $280 \times 750 : 200 \times 900 :: 23 : x$

या $280 \times 750 \times x = 200 \times 900 \times 23$

$$\therefore\ x = \frac{200 \times 900 \times 23}{280 \times 750} = \frac{138}{7}$$ सप्ताह = 138 दिन

उदा. 2: एक ठेकेदार ने एक काम को 8 घंटे प्रतिदिन काम करके 19 दिनों में समाप्त करने के लिए 42 व्यक्ति काम पर लगाया। 10 दिन बाद हड़ताल हो जाने के कारण काम दो दिन के लिए बन्द रहा। बताइए कितने और व्यक्ति काम पर लगाए जाएँ जो सब मिलकर 9 घंटे प्रतदिन काम करके काम को समय से समाप्त कर दें?

हल: $\because$ 19 दिन में होता है 1 काम

$\therefore$ 1 दिन में होता है $\frac{1}{19}$ काम

$\therefore$ 10 दिन में होता है $\frac{10}{19}$ काम

$\therefore$ 10 दिन बाद शेष काम $= 1 - \frac{10}{19} = \frac{9}{19}$

तथा 2 दिन की हड़ताल होने के कारण नियत समय में बचा शेष समय $= 19 - (10 + 2) = 7$ दिन

अब प्रश्न इस प्रकार बनाया जा सकता है: यदि 10 दिन में 8 घंटे प्रतिदिन काम करे 10/19 काम 42 व्यक्ति करते हैं तो 7 दिन में 9 घंटे प्रतिदिन काम करके 9/19 काम कितने व्यक्ति करेंगे?

राशियाँ चार हैं: दिन, घंटे, काम तथा व्यक्ति।

चूँकि व्यक्तियों की संख्या ज्ञात करनी है अतः इसे अन्तिम पंक्ति में रखा है। फिर शेष तीनों राशियों का सम्बन्ध, व्यक्ति के साथ निम्न प्रकार का है जिसे तीर के चिह्नों द्वारा प्रकट किया गया है।

(i) दिन एवं व्यक्ति-यदि कम दिन में काम होना है तो अधिक आदमी लगाने होंगे। इसलिए उल्टा अनुपात (चिह्न विपरीत दिशा में)।

(ii) घंटे एवं व्यक्ति-यदि काम प्रतिदिन अधिक घंटे होगा तो कम व्यक्तियों की आवश्यकता होगी। अतः उल्टा अनुपात (चिह्न विपरीत दिशा में)।

(iii) काम एवं व्यक्ति-यदि काम कम करवाना है तो कम व्यक्तियों की आवश्यकता होगी।

अत: सीधा अनुपात (चिह्न उसी दिशा में)।

दिन	घंटे	काम	व्यक्ति
10 ↑	8 ↑	$\frac{10}{19}$ ↓	42 ↓
7	9	$\frac{9}{19}$	x

$$\therefore \left.\begin{matrix} 7:10 \\ 9:8 \\ \frac{10}{19}:\frac{9}{19} \end{matrix}\right\} :: 42:x$$

या $7\times9\times\frac{10}{19}:10\times8\times\frac{9}{19}::42:x$

या $7\times9\times\frac{10}{19}\times x = 10\times8\times\frac{9}{19}\times42$

$\therefore\ x = \frac{10\times8\times9\times42\times19}{7\times9\times10\times19} = 48$ व्यक्ति

$\therefore$ बढ़े हुए व्यक्तियों की संख्या = 48-42=6 व्यक्ति

उदा. 3: यदि 44 लड़के किसी काम को 10 घंटे प्रतिदिन काम करते हुए 15 दिनों में पूरा करते हैं तो उससे 3/4 अधिक काम को 11 घंटे प्रतिदिन काम करते हुए कितने आदमी 7 दिनों में पूरा करेंगे, जबकि 3 आदमी 5 लड़कों के बराबर काम करते हैं।

हल: यहाँ चार राशियाँ हैं: घंटा, दिन, काम तथा लड़के। इनमें निम्न प्रकार के सम्बन्ध हैं।

(i) घंटा एवं लड़के-अधिक घंटे, कम लड़के (उल्टा)

(ii) दिन एवं लड़के-कम दिन, अधिक लड़के (उल्टा)

(iii) काम एवं लड़के- अधिक काम, अधिक लड़के (सीधा)

घंटा	दिन	काम	लड़के
10 ↑	15 ↑	1 ↓	44 ↓
11	7	$1+\frac{3}{4}$	x

$$\therefore \left.\begin{matrix} 11:10 \\ 7:15 \\ 1:\frac{7}{4} \end{matrix}\right\} :: 44:x$$

या $11 \times 7 \times 1 : 10 \times 15 \times \frac{7}{4} :: 44 : x$

या $11 \times 7 \times 1 \times x = 10 \times 15 \times \frac{7}{4} \times 44$

$\therefore x = \frac{10 \times 15 \times 7 \times 44}{11 \times 7 \times 1 \times 4} = 150$ लड़के

अब $\because$ 5 लड़के = 3 आदमी

$\therefore$ 1 लड़का $= \frac{3}{5}$ आदमी

$\therefore$ 150 लड़के $= \frac{3 \times 150}{5} = 90$ आदमी

उदा. 4: 50 मीटर लम्बी, 2 मीटर चौड़ी, और 2 मीटर गहरी खाई को 64 मनुष्य प्रतिदिन 12 घंटे काम करके 5 दिनों में खोदते हैं। 75 मीटरलम्बी, 4 मीटर चौड़ी और 3 मीटर गहरी खाई को 80 मनुष्य 8 घंटे प्रतिदिन कार्य करके कितने दिनों में खोदेंगे?

हल: यहाँ छः राशियाँ हैं। लम्बाई, चौड़ाई, गहराई, मनुष्य, घंटे तथा दिन। अधिक लम्बाई, अधिक दिनों (सीधा); अधिक चौड़ाई, अधिक दिन (सीधा); अधिक गहराई, अधिक दिन (सीधा); अधिक मनुष्य, कम दिन (उल्टा) तथा कम घंटे, अधिक दिन (उल्टा)। अतः

लम्बाई	चौड़ाई	गहराई	मनुष्य	घंटे	दिन
50 ↓	2 ↓	2 ↓	64 ↑	12 ↑	5 ↓
75	4	3	80	8	x

$$\therefore \left.\begin{array}{r} 50:75 \\ 2:4 \\ 2:3 \\ 80:64 \\ 8:12 \end{array}\right] :: 5 : x$$

या $50 \times 2 \times 2 \times 80 \times 8 : 75 \times 4 \times 3 \times 64 \times 12 :: 5 : x$

या $50 \times 2 \times 2 \times 80 \times 8 \times x = 75 \times 4 \times 3 \times 64 \times 12 \times 5$

$\therefore x = \frac{75 \times 4 \times 3 \times 64 \times 12 \times 5}{50 \times 2 \times 2 \times 80 \times 8} = 27$ दिन

उदा. 5: 2 आदमी तथा 7 लड़के मिलकर किसी काम को 14 दिनों में करते हैं जबकि 3 आदमी तथा 8 लड़के मिलकर उस काम को 11 दिनों में करते हैं। ज्ञात कीजिए कि 8 आदमी तथा 6 लड़के मिलकर उस काम से तिगुने काम को कितने दिनों में पूरा कर लेंगे?

हल: ऐसे प्रश्न में पहले आदमियों तथा लड़कों की कार्यक्षमता ज्ञात करेंगे। इसके लिए काम एवं समय निर्धारित कर लेंगे (1 काम, 1 दिन)। फिर, क्योंकि अन्य राशियाँ वही रहेंगी, क्षमता

निकालने के लिए उनकी तुलना कर सकते हैं।

∵ 14 दिन में एक काम करते हैं 2 आदमी + 7 लड़के

∴ 1 दिन में वही काम करते हैं 28 आदमी + 98 लड़के

फिर ∵ 11 दिन में उसी काम को करते हैं, 3 आदमी + 8 लड़के

∴ 1 दिन में उसी काम को करते हैं, 33 आदमी + 88 लड़के

∴ एक ही दिन में एक ही काम को, 28 आदमी एवं 98 लड़के से करवा सकते हैं या 33 आदमी एवं 88 लड़के से करवा सकते हैं, अर्थात् काम की क्षमता के अनुसार

33 आ. + 88 ल. = 28 आ. + 98 ल.

या, (33-28) आ. = (98-88) ल..

या, 5 आ. = 10 ल.

∴ 1 आ. = 2 ल.

अब, आदमियों की संख्या को लड़कों की संख्या में परिवर्तित कर सकते हैं।

∵ 2 आ. + 7 ल. = 2×2+7 = 11 ल.

तथा 8 आ. + 6 ल. = 8×2+6 = 22 ल.

∴ प्रश्न इस प्रकार का बनेगा : 11 लड़के 1 काम को 14 दिनों में करते हैं तो 22 ल. 3 काम को कितने दिनों में करेंगे? अत:

लड़के	काम	दिन
11 ↑	1 ↓	14 ↓
22	3	x

$$\therefore \left.\begin{matrix} 22:11 \\ 1:\ 3 \end{matrix}\right] :: 14 : x$$

या $22 \times 1 : 11 \times 3 :: 14 : x$

या $22 \times 1 \times x = 11 \times 3 \times 14$

$$\therefore x = \frac{11 \times 3 \times 14}{22} = 21 \text{ दिन}$$

उदा. 6: यदि 3 आदमी और 4 लड़के मिलकर 8 दिनों में 264 रु. कमाते हैं तथा 2 आदमी और 3 लड़के मिलकर उतने ही समय में 184 रु. कमाते हैं, तो बताइए कितने समय में 6 आदमी और 7 लड़के मिलकर 315 रु. कमायेंगे?

हल: चूँकि समय बराबर है, अत: 3 आ. एवं 4 ल. तथा 2 आ. एवं 3 ल. की कमाई का अनुपात 264 : 284 होगा। अर्थात् कमाई के अनुसार

$$\frac{3 \text{ आ.} + 4 \text{ ल.}}{2 \text{ आ.} + 3 \text{ ल.}} = \frac{264}{184} = \frac{33}{23}$$

या, 69 आ. + 92 ल. = 66 आ. + 99 ल.

या, 69 आ. - 66 आ. = 99 ल. - 92 ल.

या, 3 आ. = 7 ल.

अब, 3 आ. + 4 ल. = (7 + 4) ल. = 11 ल.

तथा, 6 आ. + 7 ल. = (14 + 7) ल. = 21 ल.

लड़के	कमाई	दिन
11 ↑	264 ↓	8 ↓
21	315	x

$\therefore \left.\begin{array}{l} 21:11 \\ 264:315 \end{array}\right] :: 8 : x$

या $21 \times 264 : 11 \times 315 :: 8 : x$

या $21 \times 264 \times x = 11 \times 315 \times 8$

$\therefore x = \dfrac{11 \times 315 \times 8}{21 \times 264} = 5$ दिन

उदा. 7: एक आदमी 9 घंटे प्रतिदिन विश्राम करके एक स्थान पर पैदल 50 दिनों में पहुँच सकता है। यदि वह अपनी चाल को दूना कर दे और दुगुना विश्राम भी कर ले तो वह उससे दुगुनी दूर कितने दिनों में पहुँचेगा?

हल: पहली स्थिति में, प्रतिदिन चलने का समय = 24-9 = 15 घंटे

दूसरी स्थिति में, प्रतिदिन चलने का समय = 24-18 = 6 घंटे

पहली एवं दूसरी दूरी का अनुपात = 1 : 2

पहली एवं दूसरी चाल का अनुपात = 1 : 2

चाल	दूरी	घन्टे	दिन
1 ↑	1 ↓	15 ↑	50 ↓
2	2	6	x

$\therefore \left.\begin{array}{l} 2:1 \\ 1:2 \\ 6:15 \end{array}\right] :: 50 : x$

या $2 \times 1 \times 6 : 1 \times 2 \times 15 :: 50 : x$

या $2 \times 1 \times 6 \times x = 1 \times 2 \times 15 \times 50$

$\therefore x = \dfrac{1 \times 2 \times 15 \times 50}{2 \times 1 \times 6} = 125$ दिन

उदा 8: यदि 20 पुरुष या 30 स्त्रियाँ या 60 लड़के एक काम को 10 घंटे प्रतिदिन काम करके 15 दिन में समाप्त करते हैं तो 10 स्त्रियों और 7 बालकों के साथ कितने पुरुष लगाए जाएँ कि पहले से 8/5 गुना काम 8 घंटे प्रतिदिन काम करके 12 दिन में समाप्त हो जाए?

हल:

घंटे	दिन	काम	पुरुष
10 ↑	15 ↑	1 ↓	20 ↓
8	12	8/5	x

$$\therefore \left.\begin{matrix} 8:10 \\ 12:15 \\ 1:8/5 \end{matrix}\right] :: 20 : x$$

या, $8\times12\times1:10\times15\times\frac{8}{5}::20:x$

या, $8\times12\times1\times x=10\times15\times\frac{8}{5}\times20$

$\therefore x=\frac{10\times15\times8\times20}{5\times8\times12}=50$ पुरुष

अब, 30 स्त्रियाँ = 20 पुरुष

$\therefore$ 10 स्त्रियाँ $=\frac{20}{30}\times10=\frac{20}{3}$ पुरुष

तथा 60 लड़के = 20 पुरुष

$\therefore$ 7 लड़के = $\frac{20}{60}\times7=\frac{7}{3}$ पुरुष

$\therefore$ 10 स्त्रियाँ + 7 लड़के $=\left(\frac{20}{3}+\frac{7}{3}\right)$ पुरुष = 9 पुरुष

अर्थात् इनके साथ (50 - 9 =) 41 पुरुष और लगाए जाएँ।

उदा. 9: दो दाँतेदार पहिये, जिनमें से एक के 24 दाँत हैं और दूसरे के 36 दाँत हैं, आपस में फँसकर चलते हैं। यदि दूसरा पहिया 1 मिनट में 100 चक्कर लगाए तो पहला पहिया 10 सेकेंड में कितना चक्कर लगायेगा?

हल:

दाँत	समय(सेकेंड)	चक्कर
36 ↑	60 ↓	100 ↓
24	10	x

$$\therefore \left.\begin{matrix} 24:36 \\ 60:10 \end{matrix}\right] :: 100 : x$$

या $24\times60:36\times10::100:x$

या $24\times60\times x=36\times10\times100$

$\therefore x=\frac{36\times10\times100}{24\times60}=25$ चक्कर

नोट: संख्याओं को व्यवस्थित करने से मुसीबत खड़ी हो सकती है। इससे निजात पाने के लिए आप एक सूत्र याद रखें। इस सूत्र को 'Rule of Three' कहते हैं।

Rule of Three: यदि किसी समानुपात के तीन पद दिए हुए हों और चौथा पद निकालना

हो तो चौथे पद को निकालने की विधि सरल समानुपात या Rule of Three कहा जाता है।

सरल समानुपात (Simple Proportion) के प्रत्येक सवाल में प्रदत्त पदों में से दो एक ही किस्म के होते हैं और तीसरा पद उसी तरह का होता है, जैसा कि अभीष्ट चौथा पद।

अब, उस नियम पर विचार करें जिसके सहारे सरल समानुपात से संबद्ध प्रश्नों में पदों को व्यवस्थित करते हैं:

***नियम*-I.** जिस राशि को प्राप्त करना हो उसे x से सूचित कीजिए और उसे चौथे पद के रूप में व्यवस्थित कीजिए।

II. तीन प्रदत्त पदों में से उस पद को तीसरा पद निर्धारित कीजिए जो अभीष्ट चौथे पद के अनुरूप हो।

III. अब इस बात पर सावधानी पूर्वक विचार कीजिए कि अभीष्ट राशि तीसरे पद से बड़ा होगा या छोटा। यदि यह बड़ा होगा तो बचे हुए दोनों पदों में से बड़े को दूसरा पद बनाइए एवं छोटे को पहला पद। पर यदि अभीष्ट चौथे पद को तीसरे पद से छोटा होने की उम्मीद हो तो शेष दोनों पदों में से छोटे को दूसरा पद बनाइए एवं बड़े को पहला पद।

IV. अब, निम्नलिखित सूत्र का इस्तेमाल कीजिए:

$$\text{अभीष्ट चतुर्थ पद का मान} = \frac{\text{मध्य पदों का गुणनफल}}{\text{पहला पद}}$$

समानुपात एवं Rule of Three के बारे में विस्तृत जानकारी प्राप्त करने के उपरान्त अब हमलोग कुछ ऐसे उदाहरणों को सरल करेंगे, जिन्हें साधारणतया ऐकिक नियम से हल किया जाता है।

उदा. 1: यदि 15 पुस्तकों की कीमत 35 रु. हो तो 21 पुस्तकों की कीमत क्या होगी?

हल: यह सवाल अनुलोम समानुपात (Direct Proportion) का उदाहरण है। क्योंकि जैसे-जैसे पुस्तकों की संख्या बढ़ती है, उनकी कीमत भी बढ़ती जाती है।

Rule of Three के अनुसार,

पहला चरण: ...... : ......=...... : अभीष्ट लागत

दूसरा चरण: ...... : ......= 35 रु. : अभीष्ट लागत

तीसरा चरण: अभीष्ट लागत प्रदत्त मूल्य से अधिक होगा। इसलिए बड़ी संख्या को दूसरा पद बनाना होगा

15 पुस्तक : 21 पुस्तक = 35 रु. : अभीष्ट लागत

चौथा चरण: अभीष्ट लागत $= \frac{21 \times 35}{15} = 49$ रु.

उदा. 2: एक निश्चित समयावधि में 12 व्यक्ति 111 खिलौने बनाते हैं। उतने ही समय में 148 खिलौने बनाने हैं। इसके लिए कितने व्यक्तियों की जरूरत पड़ेगी?

हल: ***पहला चरण:*** ...... : ......=...... : अभीष्ट व्यक्तियों की संख्या (x)

दूसरा चरण: ...... : ......= 12 : x

तीसरा चरण: अभीष्ट व्यक्तियों की संख्या संभावित रूप से ज्यादा होगी।

$\therefore$ 111 : 148 = 12 : x

चौथा चरण: $x = \frac{148 \times 12}{111} = 16$

उदा. 3: यदि 15 रु. में 152 आम मिलते हैं तो 5 रु. में कितने आम खरीदे जा सकते हैं?

हल: ***पहला चरण:*** ...... : ......=...... : आमों की अभीष्ट संख्या

दूसरा चरण: ...... : ......= 192 : x

तीसरा चरण: चूँकि अभीष्ट राशि 192 की अपेक्षा कम होगी, इसलिए 15 : 5 = 192 : x

चौथा चरण: $x = \frac{5 \times 192}{15} = 64$

उदा. 4: यदि 15 व्यक्ति किसी फसल को 28 दिनों में काट सकते हैं, तो 5 व्यक्ति इसे कितने दिनों में काटेंगे।

हल: ***पहला चरण:*** ...... : ......=...... : दिनों की संख्या

दूसरा चरण: ...... : ......= 28 : x

तीसरा चरण: चूँकि अभीष्ट दिनों की संख्या अधिक होगी क्योंकि 5 व्यक्ति 15 व्यक्तियों की अपेक्षा काम अधिक दिनों में संपन्न करेंगे। इसलिए 5 : 15 = 28 : x

चौथा चरण: $x = \frac{15 \times 28}{5} = 84$ दिन

उदा. 5: किसी किले में 150 व्यक्तियों के लिए 45 दिनों की खाद्य-सामग्री मौजूद है। 10 दिनों बाद 25 व्यक्ति किला छोड़कर चले जाते हैं, तो शेष खाद्य-सामग्री कितने दिनों तक चलेगी?

हल: शेष खाद्य सामग्री 150 व्यक्तियों के लिए (45 – 10) = 35 दिनों तक चलेगी। पर चूँकि 25 व्यक्ति किला छोड़कर जा चुके हैं, इसलिए शेष खाद्य-सामग्री अपेक्षाकृत अधिक दिनों तक चलेगी।

$\therefore$ **Rule of three** के अनुसार,

125 व्यक्ति : 150 व्यक्ति = 35 दिन : अभीष्ट दिनों की संख्या

$\therefore$ अभीष्ट दिनों की संख्या $= \frac{150 \times 35}{125} = 42$ दिन

मिश्र समानुपात **(Compound Proportion)** ***या*** **Double Rule of Three**

उदा. 6: यदि 8 व्यक्ति 24 दिनों में 80 हेक्टेयर काट सकते हैं तो 36 व्यक्ति 30 दिनों में कितना हेक्टेयर काटेंगे?

हल: इस प्रश्न को दो हिस्सों में बाँटा जा सकता है:

पहला हिस्सा: यदि 8 व्यक्ति 80 हेक्टेयर काट सकते हैं तो 36 व्यक्ति कितना हेक्टेयर काटेंगे?

8 मनुष्य : 36 मनुष्य = 80 हेक्टेयर : अभीष्ट हेक्टेयर

$\therefore$ अभीष्ट हेक्टेयर $= \frac{36 \times 80}{8} = 360$ हेक्टेयर

दूसरा हिस्सा: यदि 360 हेक्टेयर फसल 24 दिनों में काटा जा सकता है तो 30 दिनों में कितना हेक्टेयर फसल काटा जा सकेगा?

Rule of Three के अनुसार,

24 दिन : 30 दिन = 360 हेक्टेयर : अभीष्ट हेक्टेयर

$\therefore$ अभीष्ट हेक्टयेर $= \dfrac{30\times 360}{24} = 450$

आपने ध्यान दिया होगा कि सवाल के दूसरे हिस्से में हेक्टेयर की संख्या 80 से बदलकर 360 कर दिया गया है और यह हुआ है अनुपात $\dfrac{36}{8}$ एवं $\dfrac{30}{24}$ को मिश्रित करने से। इस प्रश्न को एकमात्र चरण में भी संपन्न किया जा सकता है। हमलोग प्रदत्त आँकड़े को निम्नलिखित रूप में सजाते हैं:

8 व्यक्ति : 36 व्यक्ति
24 दिन : 30 दिन] :: 80 हेक्टेयर : अभीष्ट हेक्टेयर

$\therefore$ अभीष्ट हेक्टेयर $= \dfrac{\text{मध्य पदों का गुणनफल}}{\text{प्रथम पदों का गुणनफल}}$

$= \dfrac{80\times 36\times 30}{8\times 24} = 450$

उदा. 7: यदि 30 व्यक्ति प्रतिदिन 7 घंटे काम करते हैं तो काम का एक हिस्सा 18 दिनों में संपन्न करते हैं। यदि 21 व्यक्ति 8 घंटे प्रतिदिन कार्य करें तो उतने ही कार्य को कितने दिनों में संपन्न करेंगे?

हल: 21 व्यक्ति : 30 व्यक्ति
8 घंटा : 7 घंटा] :: 18 दिन : अभीष्ट दिन

$\therefore$ अभीष्ट दिन $= \dfrac{18\times 30\times 7}{21\times 8} = 22\dfrac{1}{2}$ दिन

नोट: उपर्युक्त स्थिति में निम्नलिखित तार्किक निष्कर्षों का उपयोग किया गया है:

i) कम व्यक्ति : अधिक दिन

ii) अधिक घंटे : कम दिन

उदा. 8: यदि 15 पुरुष या 24 महिलाएँ या 36 बच्चे किसी कार्य को 12 दिनों में संपन्न करते हैं, जबकि कार्य प्रतिदिन 8 घंटे किया जाता है, तो 12 महिलाओं एवं 6 बच्चों के साथ कितने पुरुष मिलकर काम करें ताकि $2\dfrac{1}{4}$ गुना कार्य प्रतिदिन 6 घंटे करके 30 दिनों में निबटाया जा सके?

हल: महत्वपूर्ण तार्किक निष्कर्ष:

i) अधिक दिन : कम व्यक्ति

ii) कम घंटे : अधिक व्यक्ति

iii) अधिक कार्य : अधिक व्यक्ति

∴ Rule of Theree के अनुसार:

30 दिन : 12 दिन
6 घंटे : 8 घंटे
1 काम : $2\frac{1}{4}$ काम
] :: 15 व्यक्ति : अभीष्ट व्यक्ति

∴ अभीष्ट व्यक्तियों की संख्या $= \frac{15 \times 12 \times 8 \times 2.25}{30 \times 6 \times 1} = 18$

अब चूँकि 24 महिलाएँ = 15 पुरुष

∴ 12 महिलाएँ = 7.5 पुरुष

तथा 26 बच्चे = 15 पुरुष

∴ 5 बच्चे $= \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2.5$ पुरुष

∴ 12 महिलाएँ + 6 बच्चे = 7.5 + 2.5 = 10 पुरुष

∴ 18 − 10 = 8 पुरुषों को काम में लगाना चाहिए।

उदा. 9: 2200 सैनिकों की एक टुकड़ी के पास 16 सप्ताह की खाद्य-सामग्री है बशर्तेकि एक सैनिक प्रतिदिन 45 डेका ग्राम (Dag) भोजन करे। यदि प्रतिदिन प्रति सैनिक 33 डेका ग्राम भोजन करे तो उसी सामग्री को 24 दिनों तक चलाने के लिए कितने सैनिकों को टुकड़ी छोड़ देनी होगी?

हल: यहाँ निम्नलिखित तार्किक निष्कर्षों का इस्तेमाल किया जाता है:

i) अधिक सप्ताह : कम सैनिक

ii) कम डेका ग्राम : अधिक सैनिक

∴ Rule of Three के अनुसार,

24 सप्ताह : 16 सप्ताह
33 डेका ग्राम : 45 डेका ग्राम
] :: 2200 व्यक्ति : अभीष्ट व्यक्ति

∴ $x = \frac{2200 \times 16 \times 45}{22 \times 33} = 2000$

∴ 2200 − 2000 = 200 सैनिकों को टुकड़ी छोड़ देनी चाहिए।

उदा. 10: दो दाँतेदार पहिए एक दूसरे के अंदर फिट हैं। इनमें से एक में 16 दाँतें हैं और दूसरे में 27 दाँते हैं। यदि बाद वाला $\frac{3}{4}$ मिनट में 80 बार घूमता है तो पहला पहिया 8 सेकेंड में कितनी बार घूमेगा?

हल: यहाँ निम्नलिखित तार्किक निष्कर्षों का इस्तेमाल हो सकता है:

i) कम दाँतें, अधिक चक्कर

ii) कम समय, कम चक्कर

16 दाँतें : 27 दाँतें ⎤
45 सेकेंड : 8 सेकेंड ⎦ :: 80 चक्कर : x चक्कर

∴ Rule of Three के अनुसार, $x = \frac{80 \times 27 \times 8}{16 \times 45} = 24$ चक्कर

उदा. 11: यदि 30 व्यक्ति किसी कार्य को 27 दिनों में पूरा करते हैं तो 18 व्यक्ति उसका तीन गुना कार्य कितने दिनों में संपन्न करेंगे?

हल:

व्यक्ति 18:30 ⎤
कार्य 1:3 ⎦ :: 27 : अभीष्ट दिनों की संख्या ⎡कम व्यक्ति, अधिक दिन
⎣अधिक कार्य, अधिक दिन

∴ अभीष्ट दिनों की संख्या $= \frac{27 \times 30 \times 3}{18 \times 1} = 135$ दिन

उदा. 12: यदि 7 व्यक्तियों का एक परिवार 840 रु. में 36 दिनों तक जी सकता है तो 9 व्यक्तियों का परिवार 810 रु. में कितने दिनों तक जी सकता है?

हल:

व्यक्ति 9:7 ⎤
रु. 840:810 ⎦ :: 36 : अभीष्ट दिनों की संख्या ⎡अधिक व्यक्ति, कम दिन
⎣कम रुपए, कम दिन

∴ अभीष्ट दिनों की संख्या $= \frac{36 \times 7 \times 810}{9 \times 840} = 27$ दिन

उदा. 13: यदि 13 पृष्ठों वाली किसी पुस्तक की 1000 प्रतियों के लिए 26 रीम कागज की जरूरत पड़ती है तो 17 पृष्ठों वाली पुस्तक की 5000 प्रतियों के लिए कितने रीम कागज चाहिए होंगे?

हल:

पुस्तकें 1000:5000 ⎤
पृष्ठ 13:17 ⎦ ::26:x ⎡अधिक पुस्तकें, ज्यादा कागज
⎣अधिक पृष्ठ, ज्यादा कागज

∴ कागज की अभीष्ट मात्रा $= \frac{26 \times 5000 \times 17}{1000 \times 13} = 170$ रीम

उदा. 14: यदि 6 व्यक्ति प्रतिदिन 9 घंटे काम करें तो किसी काम को 30 दिनों में संपन्न करते हैं तो उसके 10 गुने काम को 8 घंटे प्रतिदिन के हिसाब से 25 दिनों में संपन्न करने के लिए कितने व्यक्ति चाहिए?

हल: इस प्रश्न में 3 प्रकार के तर्क समाहित हैं:

1) कम दिन, अधिक आदमी [यदि काम को कम दिनों में संपन्न किया जाना है तो अधिक

व्यक्ति काम पर लगाने होंगे।]

2) कम घंटे, अधिक व्यक्ति [यदि कार्य के घंटे कम हों, तो निश्चित अवधि में काम पूरा करने के लिए अधिक व्यक्ति काम पर लगाने होंगे।]

3) अधिक कार्य, अधिक व्यक्ति [यदि कार्य अधिक हो तो निश्चित अवधि में पूरा करने के लिए अधिक व्यक्तियों को कार्य पर लगाना होगा।]

अब Rule of Three के अनुसार,

***चरण* I.** दिन : ...... : ......

घंटे : ...... : ...... :: 6 : व्यक्तियों की अभीष्ट संख्या

कार्य : ...... : ......

***चरण* II.** Rule of Three के अनुसार,

1) काम को 25 दिनों से कम में पूरा करने के लिए अधिक व्यक्ति चाहिए। इसलिए दूसरे स्थान पर बड़ी संख्या होगी एवं पहले स्थान पर छोटी संख्या होगी। जैसे, घंटे : 25 : 30

2) कार्य करने के घंटे घट कर 8 हो गए हैं। इसलिए अधिक व्यक्तियों की जरूरत पड़ेगी। इसलिए दूसरे स्थान पर बड़ी संख्या एवं प्रथम स्थान पर छोटी संख्या होगी। जैसे, घंटे : 8 : 9

3) चूँकि कार्य दस गुना हो गया है। इसलिए पूरा करने के लिए अधिक व्यक्ति चाहिए होंगे। इसलिए दूसरे स्थान पर बड़ी संख्या एवं पहले स्थान पर छोटी संख्या होगी। जैसे, कार्य : 1 : 10

इस प्रकार चरण I के सभी रिक्त स्थान भरे जा सकते हैं।

दिन	25 : 30	
घंटे	8 : 9	:: 6 : x
कार्य	1 : 10	

Rule of Three के अनुसार,

$$x = \frac{\text{तीसरा पद} \times \text{मध्य पदों का गुणनफल}}{\text{पहले पदों का गुणनफल}}$$

या, $x = \frac{6 \times 30 \times 9 \times 10}{25 \times 8 \times 1} = 81$ व्यक्ति

अब हमलोग ***'भिन्न का नियम'*** **(Rule of Fractions)** की चर्चा करेंगे। यह बहुत कुछ Rule of Three से मिलता-जुलता है।

भिन्न के आधारभूत सिद्धांत (Some basics of fraction)

1) यदि किसी भिन्न का अंश उसके हर से बड़ा हो तो भिन्न का मान एक से अधिक होता है। सुविधा के लिए ऐसे भिन्न को महत्तर भिन्न (greater fraction) कह सकते हैं। जब किसी संख्या x में ऐसे महत्तर भिन्न से गुणा किया जाता है, तो गुणनफल का मान उस संख्या से अधिक होता है।

उदाहरण के लिए, जब 15 में $\frac{4}{3}$ (महत्तर भिन्न) से गुणा किया जाता है, तो गुणनफल 20, 15 से अधिक है।

2) यदि किसी भिन्न का अंश हर से छोटा हो तो इसका मान एक से कम होता है। सुविधा के लिए इसे न्यूनतर भिन्न (less fraction) कह सकते हैं। जब कभी किसी संख्या में न्यूनतर भिन्न से गुणा किया जाता है तो प्राप्त गुणनफल उस संख्या से कम होता है। उदाहरण के लिए, $15\times\frac{3}{5}=9$, जो कि 15 से छोटा है।

नोट: 'भिन्न का नियम' (**Rule of Fractions**) के सहारे उदा.-14 को हल करने के क्रम में **Rule of Three** के अतिरिक्त उपर्युक्त दोनों सिद्धांतो का भी इस्तेमाल किया जाएगा।

हल: ***चरण* I:** प्रश्न में क्या माँगा गया है? निश्चित रूप से व्यक्तियों की संख्या पता लगाना है। इसलिए हम प्रश्न में व्यक्त व्यक्तियों की संख्या लिख लेते हैं। यह संख्या है 6।

***चरण* II:** दिनों की संख्या 30 से घटकर 25 हो जा रही है। इसलिए अधिक व्यक्तियों की जरूरत पड़ेगी (तर्क- कम दिन, अधिक व्यक्ति)। इसका सीधा अर्थ है कि 6 में किसी महत्तर भिन्न से गुण किया जाना चाहिए, क्योंकि हमें 6 से अधिक मान वाली संख्या चाहिए।

$$\therefore\ 6\times\frac{30}{25}$$

***चरण* III:** इसी प्रकार, उपर्युक्त भिन्न किसी महत्तर भिन्न से गुणित होना चाहिए। और वह संख्या है $\frac{9}{8}$।

$$\therefore\ 6\times\frac{30}{25}\times\frac{9}{8}$$

***चरण* IV:** इसी तरह उपर्युक्त राशि में महत्तर भिन्न $\frac{10}{1}$ से गुणा किया जाना चाहिए।

$$\therefore\ \text{अभीष्ट व्यक्तियों की संख्या} = 6\times\frac{30}{25}\times\frac{9}{8}\times\frac{10}{1}=81\ \text{व्यक्ति}$$

उदा. 15: एक खास समय में 9 व्यक्ति 108 खिलौने बना सकते हैं, तो उतने ही समय में 48 खिलौने बनाने के लिए कितने व्यक्ति चाहिए होंगे?

हल: चूँकि कम खिलौने बनाने हैं, इसलिए आदमी भी कम चाहिए होंगे। अत: व्यक्तियों की संख्या में न्यूनतर भिन्न से गुणा करना होगा:

$$9\times\frac{48}{108}=4\ \text{व्यक्ति}$$

उदा. 16: यदि 8 व्यक्ति 24 दिनों में 80 हेक्टेयर काट सकते हैं तो 36 व्यक्ति 30 दिनों में कितना हेक्टेयर फसल काटेंगे?

हल: **चरण I:** यहाँ अभीष्ट इकाई हेक्टेयर है, इसलिए उसकी संख्या लिख लें।

हेक्टेयर की संख्या = **80**

चरण II: चूँकि व्यक्तियों की संख्या 8 से बढ़कर 36 हो रही है, इसलिए व्यक्तियों की संख्या बढ़ जाएगी। 80 में किसी महत्तर-भिन्न से गुणा करना पड़ेगा। $\therefore \quad 80\times\frac{36}{8}$

चरण III: चूँकि दिनों की संख्या भी 24 से बढ़कर 30 हो रही है, इसलिए हेक्टेयर की संख्या भी बढ़ेगी। इस प्रकार,

$$80\times\frac{36}{8}\times\frac{30}{24}=450 \text{ हेक्टेयर}$$

समानुपाती विभाजन (Proportional Division)

समानुपात का उपयोग किसी राशि को ऐसे हिस्सों में विभाजित करने में किया जा सकता है जो प्रदत्त संख्या के समानुपाती हों।

उदा. 1: 1350 रु. को तीन ऐसे हिस्सों में विभाजित करें जो संख्या 2, 3 एवं 4 के समानुपाती हों।

हल: पहला हिस्सा $= 1350\times\frac{2}{2+3+4}=1350\times\frac{2}{9}=300$ रु.

दूसरा हिस्सा $= 1350\times\frac{3}{9}=450$ रु.

तीसरा हिस्सा $= 1350\times\frac{4}{9}=600$ रु.

उदा. 2: 390 रु. को तीन ऐसे हिस्सों में विभाजित करें, जो भिन्न $\frac{1}{2},\frac{2}{3}$ एवं $\frac{3}{4}$ के समानुपाती हों।

हल: प्रदत्त अनुपातों को हर 2, 3 एवं 4 के ल.स. (LCM), 12 से गुणा करने पर, हमें

$\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\times12:\frac{2}{3}\times12:\frac{3}{4}\times12 = 6:8:9$ प्राप्त होता है

अब, $6+8+9=23$

$\therefore$ पहला हिस्सा $= \frac{6}{23}\times391=102$ रु.

दूसरा हिस्सा $= \frac{8}{23}\times391=136$ रु.

तीसरा हिस्सा $= \frac{9}{23}\times391=153$ रु.

नोट: तीसरा हिस्सा प्राप्त करने के लिए पहले एवं दूसरे हिस्से अर्थात् 102 रु. एवं 136 रु. के योगफल को 391 रु. में से घटाया भी जा सकता है।

उदा. 3: एक निश्चित रकम को A, B एवं C के बीच इस प्रकार विभाजित किया जाता है कि A को मिलनेवाले 1 रु. के लिए B को 65 पैसे एवं C को 40 पैसे मिलें। यदि C को कुल 8 रु. प्राप्त हुए तो कुल रकम कितनी थी?

हल: यहाँ, A : B : C = 100 : 65 : 40 = 20 : 13 : 8

अब, 20 + 13 + 8 = 41

$\because$ कुल रकम का $\frac{8}{41} = 8$ रु.

$\therefore$ कुल रकम = $\frac{8 \times 41}{8} = 41$ रु.

उदा. 4: 1540 रु. को A, B एवं C के बीच इस प्रकार विभाजित करें कि A को B और C के कुल हिस्से का $\frac{2}{9}$ प्राप्त हो तथा B को A एवं C के कुल हिस्से का $\frac{3}{11}$ प्राप्त हो।

हल: A का हिस्सा : (B + C) का हिस्सा = 2 : 9 ....(1)

B का हिस्सा : (A + C) का हिस्सा = 3 : 11 ....(2)

1540 रु. को 2 : 9 एवं 3 : 11 के अनुपात में विभाजित करने पर,

A का हिस्सा = 1540 रु. का $\frac{2}{11}$ = 280 रु.

B का हिस्सा = 1540 रु. का $\frac{3}{14}$ = 330 रु.

$\therefore$ C का हिस्सा = 1540 रु. − (280 रु. + 330 रु.) = 930 रु.

उदा. 5: 581 को तीन हिस्सों में विभाजित करें ताकि पहले हिस्से का 4 गुना दूसरे हिस्से के 5 गुना एवं तीसरे हिस्से के 7 गुना के बराबर हो।

हल: पहले हिस्से का 4 गुना = दूसरे हिस्से का 5 गुना = तीसरे हिस्से का 7 गुना = 1 (माना)

$\therefore$ पहला हिस्सा = $\frac{1}{4}$, दूसरा हिस्सा = $\frac{1}{5}$ एवं तीसरा हिस्सा = $\frac{1}{7}$

पहला हिस्सा : दूसरा हिस्सा : तीसरा हिस्सा

$= \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{7} = 35 : 28 : 20$

अब 581 को इन संख्याओं के समानुपात में विभाजित करें।

नोट: ऐसे प्रश्नों में इस बात का ध्यान रखें कि तीनों हिस्से प्रदत्त संख्याओं 4, 5 एवं 7 के प्रतिलोम समानुपाती हैं।

उदा. 6: 2430 रु. को तीन व्यक्ति A, B एवं C के बीच इस प्रकार विभाजित कीजिए ताकि उनके हिस्से से यदि क्रमशः 5, 10 एवं 15 रु. घटा लिए जाएँ तो शेष रकम 3 : 4 : 5 के अनुपात में होते हैं।

हल: 2430 रु. $-(5+10+15)$रु. $=2400$ रु.

2400 रु. को 3 : 4 : 5 के अनुपात में विभाजित करने पर,

A का हिस्सा $= \frac{3}{3+4+5} \times 2400 + 5$ रु. $= 605$ रु.

B का हिस्सा $= \frac{4}{3+4+5} \times 2400 + 10$ रु. $= 810$ रु.

C का हिस्सा $= \frac{5}{3+4+5} \times 2400 + 15$ रु. $= 1015$ रु.

उदा. 7: 1320 रु. को 7 पुरुषों 11 महिलाओं एवं 5 बच्चों के बीच विभाजित किया जाना है यह विभाजन इस प्रकार हो कि प्रत्येक महिला को एक बच्चे को प्राप्त रकम का 3 गुना मिले तथा प्रत्येक पुरुष को एक महिला एवं एक बच्चे के सम्मिलित रकम के बराबर प्राप्त हो। बताएँ कि प्रत्येक व्यक्ति को कितना प्राप्त होता है?

हल: 1 पुरुष = 1 महिला + 1 बच्चा

1 महिला = 3 बच्चा

$\therefore$ 1 पुरुष = 4 बच्चा

$\therefore$ 7 पुरुष : 11 महिला : 5 बच्चा = 28 बच्चे : 33 बच्चे : 5 बच्चे

= 28 : 33 : 5

1320 रु. को 28, 33 एवं 5 के अनुपात में विभाजित करने पर,

7 पुरुषों का हिस्सा $= \frac{28}{66} \times 1320 = 560$ रु.

$\therefore$ 1 पुरुष का हिस्सा $= \frac{560}{7} = 80$ रु.

4 बच्चे का हिस्सा = 80 रु. ($\because$ 1 पुरुष = 4 बच्चे)

$\therefore$ 1 बच्चे का हिस्सा = 20 रु.

एवं 1 महिला का हिस्सा $= 3 \times 20 = 60$ रु.

उदा. 8: एक रुपया, 50 पैसा एवं 25 पैसे वाले सिक्कों को $\frac{5}{2}, 3$ एवं 4 के अनुपात में मिलाया गया है। यदि कुल रकम 210 रु. हो तो हर प्रकार के सिक्कों की संख्या बताएँ।

हल: यहाँ, $2\frac{1}{2} : 3 : 4 = 5 : 6 : 8$

इनका समानुपाती मान $= 5 \times 1 : 6 \times \frac{1}{2} : 8 \times \frac{1}{4} = 5 : 3 : 2$

अब, $5 + 3 + 2 = 10$

$\therefore$ रुपए का मान = 210 का $\frac{5}{10} = 105$ रु.

50 पैसे के सिक्कों का मान = 210 का $\frac{3}{10} = 63$ रु.

25 पैसे वाले सिक्कों का कुल मान = $210 \times \frac{2}{10} = 42$ रु.

$\therefore$ 1 रु. वाले 105 सिक्के, 50 पैसे वाले 126 सिक्के एवं 25 पैसे वाले 168 सिक्के हैं।

विविध उदाहरण

प्रमेय: यदि दूध और पानी के x लिटर मिश्रण में दूध एवं पानी a : b के अनुपात में हों तो उस मिश्रण में दूध एवं पानी का अनुपात c : d करने के लिए उसमें $\frac{x(ad-bc)}{c(a+b)}$ लिटर पानी मिलाना होगा।

प्रमाण: मिश्रण में दूध की मात्रा = $\frac{x}{a+b}.a$

मिश्रण में पानी की मात्रा = $\frac{x}{a+b}.b$

मान लिया कि मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात (c:d) बनाने के लिए, हमें y लिटर पानी मिलाना होगा। इसलिए,

$$\left(\frac{ax}{a+b}\right):\left(\frac{bx}{a+b}+y\right) = c:d$$

या, $$\left(\frac{ax}{a+b}\right):\left(\frac{bx+y(a+b)}{a+b}\right) = c:d$$

या, $$\frac{ax}{bx+y(a+b)} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad y = \frac{x(ad-bc)}{(a+b)c}$$

नोट: उपर्युक्त परिणाम को स्मरण रखना मुश्किल नहीं है। इसे स्मरण रखें। इससे समय की बचत होती है।

उदा. 1: दूध और पानी के 40 लिटर मिश्रण में दूध और पानी 3 : 1 के अनुपात में हैं। उसमें कितना पानी मिलाया जाए कि दूध और पानी का अनुपात 2 : 1 हो जाए?

हल: इस सवाल को सीधे उपर्युक्त सूत्र से हल करने पर,

पानी की अभीष्ट मात्रा $= \frac{40(3\times1-1\times2)}{(3+1)\times2} = \frac{40}{8} = 5$ लिटर

उपर्युक्त हल को निम्नलिखित विधि से जाँचा जा सकता है।

40 लिटर मिश्रण में, दूध $= \frac{40}{3+1}\times3 = 30$ लिटर एवं पानी $= 40 - 30 = 10$ लिटर

5 लिटर पानी मिलाने पर नये मिश्रण में, दूध = 30 लिटर एवं पानी = 10 + 5 = 15 लिटर

$\therefore$ नया अनुपात = 30 : 15 = 2: 1

यह अनुपात प्रश्न में प्रदत्त अनुपात के बराबर है।

***दूसरी द्रुत विधि* (Another Quicker Approach) :**

प्रारंभिक अनुपात : दूध = 30 लिटर, पानी = 10 लिटर

अंतिम अनुपात = 2 : 1

आपको पानी मिलाना है। इसका अर्थ है दूध की मात्रा समान रहती है (30लिटर)। अंतिम अनुपात में दूध का मान 2 है। इसका तात्पर्य है कि $2 \equiv 30$ या, $1 \equiv 15$. इसका अर्थ है, अंतिम मिश्रण में पानी 15 होना चाहिए। इसलिए 5 लिटर पानी मिलाया जाना चाहिए।

उदा. 2: दूध और पानी के 30 लिटर मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 7:3 है। उस मिश्रण में कितना पानी मिलाया जाए कि अनुपात बदलकर 3:7 हो जाए?

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार,

अभीष्ट उत्तर $= \frac{30(7\times7-3\times3)}{3(7+3)} = 40$ लिटर

नोट: यह प्रश्न उपर्युक्त प्रमेय की एक विशिष्ट स्थिति है। यहाँ पहले की तुलना में पानी मिलाने के बाद अनुपात उलट जाता है। अर्थात a : b अनुपात नए मिश्रण में b : a हो जाता है तथा कुल मिश्रण (पानी मिलाने से पूर्व) हर $c(a+b)$ के बराबर है। ऐसी स्थिति में मिलाए जाने वाले पानी की मात्रा $= a^2 - b^2$.

***दूसरी द्रुत विधि* (Another Quicker Approach) :**

प्रारंभिक अनुपात : दूध = 21 लिटर, पानी = 9 लिटर

अंतिम अनुपात : दूध : पानी = 3 : 7

आपको पानी मिलाना है। इसका अर्थ है पानी की मात्रा समान रहती है (21 लिटर)। चूँकि अंतिम अनुपात में दूध का मान 3 है, तो इसका अर्थ $3 \equiv 21 \;\therefore\; 7 \equiv 49$. इसका तात्पर्य है अंतिम मिश्रण में पानी 49 लिटर होना चाहिए, अर्थात् (49 – 9 =) 40 लिटर पानी मिलाया जाना चाहिए।

प्रमेय: किसी मिश्रण में दूध और पानी a : b के अनुपात में हैं। यदि मिश्रण में x लिटर पानी मिलाया जाए तो दूध और पानी का अनुपात बदलकर a : c हो जाता है। ऐसी स्थिति में मिश्रण में

दूध की मात्रा $= \dfrac{ax}{c-b}$ एवं पानी की मात्रा $= \dfrac{bx}{c-b}$

प्रमाण: मान लिया कि मिश्रण M लिटर है।

$\therefore$ दूध की मात्रा $= \dfrac{aM}{a+b}$ लिटर

एवं पानी की मात्रा $= \dfrac{bM}{a+b}$ लिटर

यदि मिश्रण में x लिटर पानी मिला दिया जाए तो, $\dfrac{aM}{a+b} : \dfrac{bM}{a+b} + x = a : c$

या, $\dfrac{aM}{a+b} : \dfrac{bM + x(a+b)}{a+b} = a : c$

या, $\dfrac{aM}{bM + x(a+b)} = \dfrac{a}{c}$

या, $cM = bM + x\,(a+b)$

$\therefore \quad M = \dfrac{x(a+b)}{(c-b)}$

इस प्रकार, मिश्रण में दूध की मात्रा $= \dfrac{aM}{a+b} = \dfrac{ax(a+b)}{(a+b)(c-b)} = \dfrac{ax}{c-b}$

इसी तरह, मिश्रण में पानी की मात्रा $= \dfrac{bM}{a+b} = \dfrac{bx(a+b)}{(a+b)(c-b)} = \dfrac{bx}{c-b}$

उदा. 3: किसी मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 3 : 2 है। यदि मिश्रण में 4 लिटर पानी मिला दिया जाए तो मिश्रण में दूध और पानी बराबर हो जाता है। मिश्रण में दूध और पानी की मात्रा क्या है?

हल: यदि इस सवाल को उपर्युक्त प्रमेय के आधार पर हल करना चाहें तो हमें अनुपात को a : b एवं a : c के रूप में व्यक्त करना होगा। इस प्रश्न में आरंभिक अनुपात 3 : 2 है। इस प्रकार पूर्व पद को बराबर करने के लिए हम दूसरे अनुपात को 3 : 3 लिखते हैं। अब उपर्युक्त सूत्र से,

दूध की मात्रा $= \dfrac{3 \times 4}{3-2} = 12$ लिटर

तथा, पानी की मात्रा $= \dfrac{2 \times 4}{3-2} = 8$ लिटर

***दूसरी द्रुत विधि* (Another Quicker Approach) :**

प्रारंभिक अनुपात = 3 : 2

दूसरा अनुपात = 3 : 3

हम देखते हैं कि प्रारंभिक अनुपात में पानी 2 है तथा यह दूसरे अनुपात में जब 4 लिटर पानी मिलाया जाता है तो यह 3 हो जाता है

इसका अर्थ है अनुपात में 1 ≡ 4 लिटर पानी

अतः, दूध = अनुपात में 3 ≡ 12 लिटर

पानी = अनुपात में 2 ≡ 8 लिटर

उदा. 4: किसी मिश्रण में दूध और पानी 8 : 3 के अनुपात में है। मिश्रण में 3 लिटर पानी मिलाने पर दूध और पानी का अनुपात बदलकर 2:1 हो जाता है। मिश्रण में दूध और पानी की मात्रा ज्ञात करें।

हल: उपर्युक्त प्रमेय का उपयोग करने के लिए हम प्रदत्त अनुपात को a : b एवं a : c के रूप में अभिव्यक्त करते हैं। इस प्रकार व्यक्त अनुपात है 8 : 3 एवं 8 : 4। ∴ मिश्रण में दूध की मात्रा = $\frac{8\times3}{4-3}=24$ लिटर एवं, मिश्रण में पानी की मात्रा = $\frac{3\times3}{4-3}=9$ लिटर।

***दूसरी द्रुत विधि* (Another Quicker Approach) :**

प्रारंभिक : दूध : पानी : = 8 : 3

अंतिम : दूध : पानी : = 2 : 1

या 8 : 4

चूँकि दूध समान रहता है, हम दूसरे (अंतिम) अनुपात को इस प्रकार से परिवर्तित करते हैं जिससे कि दूध दोनों ही अनुपातों में एक समान रहता है। अब हम पानी भाग पर ध्यान देते हैं। 1 की वृद्धि होती है। इसका अर्थ है 1 ≡ 4 लिटर

इसलिए, दूध = (3 × 8 =) 24 लिटर

पानी = (3 × 3 =) 9 लिटर

प्रमेय: यदि दो राशियाँ X एवं Y, x : y के अनुपात में हों तो

$$X+Y:X-Y::x+y:x-y$$

प्रमाण: उपर्युक्त प्रमेय को योगानुपात (componendo) एवं अंतरानुपात (dividendo) के नियम से प्रमाणित किया जा सकता है।

दिया गया है कि $\frac{X}{Y}=\frac{x}{y}$

योगानुपात एवं अंतरानुपात के नियम के अनुसार, $\frac{X+Y}{X-Y}=\frac{x+y}{x-y}$

या, $X+Y:X-Y=x+y:x-y$

$\therefore\ X+Y:X-Y::x+y:x-y$

नोट: 1. यदि a : b : : c : d, तो b : a : : d : c

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ से $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ प्राप्त होता है। यह संक्रिया व्युत्क्रमानुपात (invertendo) कहलाती है। इसका तात्पर्य है कि यदि चार राशियाँ समानुपाती हों तो व्युत्क्रम में लेने पर भी यह समानुपात में ही रहती हैं।

2. यदि a : b : : c : d, तो a : c : : b : d

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ से $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ प्राप्त होता है। यह संक्रिया एकांतरानुपात (alternendo) कहलाती है। इससे तात्पर्य यह है कि यदि चार राशियाँ समानुपात में हों तो एकांतर में लेने पर भी यह समानुपात में ही रहती हैं।

3. यदि a : b : : c : d, तो (a + b) : b : : (c + d) : d

दिया गया है कि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, अतः $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$

या, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

इस संक्रिया को योगानुपात (componendo) कहते हैं।

4. यदि a : b : : c : d, तो (a - b) : b : : (c - d) : d

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, अतः $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ या, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

इस संक्रिया को अंतरानुपात (dividendo) कहते हैं।

5. यदि a : b : : c : d, तो (a + b) : (a - b) : : (c + d) : (c - d)

योगांतरानुपात (componendo - dividendo) का उपयोग करते हुए, हमें प्राप्त होता है

$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ .... (1)

तथा, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ .... (2)

(1) और (2) के क्रमशः पक्षों को विभाजित करते हुए, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

इस संक्रिया को योगांतरानुपात (componendo - dividendo) कहते हैं।

उदा. 5: कुछ रकम दो व्यक्तियों के बीच 3:5 के अनुपात में विभाजित की जाती है। यदि एक व्यक्ति को दूसरे की अपेक्षा 20 रु. कम मिला हो तो रकम क्या है?

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार, $\frac{\text{कुल रकम}}{20} = \frac{3+5}{5-3}$

$\therefore$ कुल रकम $= \frac{8}{2} \times 20 = 80$ रु.

नोट: इस सवाल को निम्नलिखित विधि (जो कि प्रमेय के अनुरूप है) से भी हल कर सकते हैं।

$5-3 \equiv 20$ रु. $\therefore$ $5+3 \equiv \frac{20}{5-3} \times (5+3) = 80$ रु.

उदा. 6: स्कूटर एवं मोपेड की कीमत का अनुपात 9:5 है। यदि स्कूटर की कीमत मोपेड से 4200 रु. अधिक हो तो मोपेड की कीमत ज्ञात करें।

हल: उपर्युक्त 'नोट' में बताई गई विधि से हल करने पर, $9-5 \equiv 4200$ रु.

$\therefore$ $5 \equiv \frac{4200}{9-5} \times 5 = 5250$ रु.

प्रमेय: यदि किसी द्विविमीय (**two-dimensional**) आकृति (जिस आकृति में केवल लंबाई एवं चौड़ाई हो) की संगत भुजाएँ $a:b$ के अनुपात में हों तो उनका क्षेत्रफल $a^2:b^2$ के अनुपात में होता है।

प्रमाण: उपर्युक्त प्रमेय को सिद्ध करने के लिए एक आयत पर विचार कीजिए। चूँकि आयत एक द्विविमीय आकृति है, इसलिए प्राप्त निष्कर्ष सभी द्विविमीय आकृतियों पर लागू होगा। मान लिया कि विचाराधीन आयत की भुजाएँ x एवं y हैं। दिया गया है कि दूसरे आयत की भुजाएँ $a:b$ के अनुपात में हैं।

$\therefore$ दूसरे आयत की भुजाएँ $= \frac{b}{a}x$ एवं $\frac{b}{a}y$

$\therefore$ दोनों आयतों के क्षेत्रफल का अनुपात $= xy : \frac{b^2}{a^2}xy = a^2 : b^2$

उदा. 7: किसी षट्भुज (**hexagon**) की भुजाएँ तिगुनी कर दी जाती हैं तो नए एवं पुराने षट्भुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करें।

हल: उपर्युक्त प्रमेय को ध्यान में रखते हुए, दोनों षट्भुजों की भुजाओं का अनुपात $a:b = 1:3$

$\therefore$ दोनों षट्भुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात $= a^2:b^2 = 1^2:3^2 = 1:9$

उदा. 8: दो वर्गों के विकर्णों का अनुपात 2 : 1 है। उनके क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करें।

हल: यदि भुजाओं के अनुपात की जगह विकर्णों का अनुपात दिया गया हो, तो भी उपर्युक्त नियम (प्रमेय) ही लागू होगा।

$\therefore$ क्षेत्रफलों का अनुपात $= 2^2:1^2 = 4:1$

उदा. 9: दो वृत्तों की त्रिज्या (या व्यास या परिधि) का अनुपात 3 : 4 है। उनके क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करें।

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार,

क्षेत्रफलों का अनुपात = $3^2 : 4^2 = 9 : 16$

नोट: उपर्युक्त प्रमेय हर तरह के द्विविमीय आकृति के लिए समान रूप से सत्य है। यह जरूरी नहीं है कि भुजाओं का ही अनुपात दिया हुआ हो, उनके अन्य मापों के संदर्भ में भी यह उतना ही सत्य है। (उदा.-8 एवं उदा.-9 में इसे देखा जा सकता है।)

प्रमेय: यदि किन्हीं दो त्रिविमीय (three-dimensional) आकृतियों की संगत भुजाएँ या अन्य माप a : b के अनुपात में हों तो उनका आयतन $a^3 : b^3$ के अनुपात में होता है।

उदा. 10: **(a)** किन्हीं दो घन की भुजाएँ 2:1 के अनुपात में हैं तो उनके आयतन का अनुपात बताएँ।

(b) यदि एक घनाभ (Parallelopiped) की प्रत्येक भुजा दुगुनी कर दी जाती है तो पुराने एवं नए घनाभ के आयतन का अनुपात ज्ञात करें।

हल: (a) अभीष्ट अनुपात = $(2)^3 : (1)^3 = 8 : 1$ (b) अभीष्ट अनुपात = $(1)^3 : (2)^3 = 1 : 8$

प्रमेय: दो संख्याओं का अनुपात a : b है। यदि दोनों संख्याओं में x की बढ़त हो जाए और अनुपात बदलकर c : d हो जाता है तो

दोनों संख्याओं का योगफल = $\dfrac{x(a+b)(c-d)}{ad-bc}$

दोनों संख्याओं का अंतर = $\dfrac{x(a-b)(c-d)}{ad-bc}$

और दोनों संख्याओं को $\dfrac{xa(c-d)}{ad-bc}$ एवं $\dfrac{xb(c-d)}{ad-bc}$ लिखा जाता है।

प्रमाण: मान लिया कि दोनों संख्याओं का योगफल X है।

तो संख्याएँ $\dfrac{aX}{a+b}$ एवं $\dfrac{bX}{a+b}$ हैं।

जब प्रत्येक संख्या में x की वृद्धि होती है तब $\dfrac{aX}{a+b} + x : \dfrac{bX}{a+b} + x = c : d$

या, $\dfrac{aX + x(a+b)}{a+b} : \dfrac{bX + x(a+b)}{a+b} = \dfrac{c}{d}$

या, $\dfrac{aX + x(a+b)}{bX + x(a+b)} = c : d$

$\therefore \quad X = \dfrac{x(a+b)(c-d)}{ad-bc}$

और संख्याएँ हैं:

$$\frac{aX}{a+b}=\frac{xa(c-d)}{ad-bc} \text{ एवं } \frac{bX}{a+b}=\frac{xb(c-d)}{ad-bc}$$

$\therefore$ दोनों संख्याओं का अंतर $= \dfrac{x(a-b)(c-d)}{ad-bc}$

उदा. 11: दो संख्याओं का अनुपात 3 : 4 है। यदि प्रत्येक संख्या में 2 जोड़ दिया जाए तो अनुपात बदलकर 7 : 9 हो जाता है। संख्याएँ क्या हैं?

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार, संख्याएँ

$\dfrac{2\times3(7-9)}{3\times9-4\times7}$ एवं $\dfrac{2\times4(7-9)}{3\times9-4\times7}$ हैं।

या, 12 एवं 16।

***दूसरी द्रुत विधि* (Another Quicker Approach) :**

प्रारंभिक अनुपात = 3 : 4 = 6 : 8

अंतिम अनुपात = 7 : 9

चूँकि प्रत्येक संख्या को समान मान से बढ़ाया जाता है, इसलिए हम पहला या दूसरा अनुपात को इस प्रकार से परिवर्तित करते हैं जिससे कि उसके पूर्व पदों **(antecedents)** एवं अंतिम पदों **(consequents)** के अलग-अलग अंतर समान हों। इसलिए यदि हम प्रारंभिक अनुपात (पहला) को 6 : 8 कर दें तो, हम देखते हैं कि 7 - 6 = 1 = 9 - 8. इसका तात्पर्य है कि परिवर्तित प्रारंभिक अनुपात में 1, 2 के समतुल्य है। इसलिए संख्याएँ हैं : 6 × 2 एवं 8 × 2 अर्थात् 12 एवं 16.

उदा. 12: दो संख्याओं का अनुपात 3 : 4 है। यदि दोनों संख्याओं में छः की बढ़त हो जाए तो अनुपात बदलकर 4 : 5 हो जाता है। दोनों संख्याएँ क्या हैं?

हल: इस सवाल को उपर्युक्त प्रमेय की विशेष-स्थिति के रूप में स्वीकार किया जा सकता है, जहाँ,

$c-a=d-b$

ऐसे प्रश्नों को पहचानना बड़ा आसान है। ऐसे प्रश्नों में अनुपात के पूर्व पद एवं अंतिम पद में समान वृद्धि होती है।

इस प्रश्न में पूर्व पद एवं अंतिम पद दोनों में 1 की वृद्धि होती है एवं संख्याओं में 6 की बढ़त होती है। इसलिए कहा जा सकता है कि

$1\equiv6$

या, $3\equiv3\times6\equiv18$

एवं, $4\equiv4\times6=24$

$\therefore$ संख्याएँ 18 एवं 24 हैं।

नोट-1. उपर्युक्त सूत्र उदा.-12 पर भी लागू होता है। हमारा सुझाव है कि आप इस सूत्र का प्रयोग करें। यह विधि सार्वभौम है एवं इसके प्रयोग से परिचित होना जरूरी है।

2. उपर्युक्त प्रश्न को निम्नलिखित ढंग से भी लिखा जा सकता है।

'दो संख्याओं का अनुपात 4:5 है। यदि दोनों संख्याओं को 6 कम कर दिया जाए तो अनुपात बदलकर 3:4 हो जाता है। दोनों संख्याएँ क्या हैं'? इस स्थिति में भी वही नियम लागू होगा।

उदा. 13: तीन कक्षाओं में विद्यार्थी 2:3:5 के अनुपात में हैं। यदि प्रत्येक कक्षा में 20 विद्यार्थी बढ़ा दिए जाएँ तो अनुपात बदलकर 4:5:7 हो जाता है। विद्यार्थियों की संख्या बढ़ाए जाने से पूर्व प्रत्येक कक्षा में कितने विद्यार्थी थे?

हल: इस सवाल में भी प्रत्येक आनुपातिक पद में 1 की बढ़त होती है।

$4-2=5-3=7-3$

इस प्रकार, $2 \equiv 20$

$$\therefore \; (2+3+5)=\frac{20}{2}\times 10=100 \text{ विद्यार्थी}$$

प्रमेय: दो व्यक्तियों की आय एवं व्यय का अनुपात क्रमशः $a:b$ एवं $c:d$ हैं। यदि प्रत्येक व्यक्ति X रु. की बचत करता हो तो उनकी आय को क्रमशः $\frac{Xa(d-c)}{ad-bc}$ एवं $\frac{Xb(d-c)}{ad-bc}$ से व्यक्त किया जाता है।

प्रमाण: स्वयं प्रयास करें क्योंकि इसका प्रमाण बहुत हद तक पिछले प्रमेय के प्रमाण के अनुरूप ही है।

उदा. 14: A एवं B की आय एवं व्यय का अनुपात क्रमशः 3 : 2 एवं 5 : 3 हैं। यदि दोनों अलग-अलग 2000 रु. की बचत करते हों तो उनकी आय ज्ञात करें।

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार,

$a:b=3:2$ (आय)

$c:d=5:3$ (व्यय)

$X=2000$ रु. (बचत)

$$\therefore \; A \text{ की आय} = \frac{Xa(d-c)}{ad-bc} = \frac{2000\times 3\times(3-5)}{3\times 3-2\times 5} = 12000 \text{ रु.}$$

$$\text{एवं } B \text{ की आय} = \frac{Xb(d-c)}{ad-bc} = \frac{2000\times 2\times(3-5)}{3\times 3-2\times 5} = 8000 \text{ रु.}$$

नोट: **I.** यदि हमें व्यय निकालने के लिए कहा जाए तो इसके दो तरीके हैं:

1) व्यय = आय – बचत

$\therefore$ A का व्यय = (12000 – 2000) रु. = 10000 रु.

B का व्यय = (8000 – 2000) रु. = 6000 रु.

2) सूत्र निम्नलिखित है:

$$A \text{ का व्यय} = \frac{Xc(b-a)}{ad-bc}; \qquad B \text{ का व्यय} = \frac{Xd(b-a)}{ad-bc}$$

II. यदि आप गौर फरमाएँ तो पाएँगे कि आय एवं व्यय की गणना से संबद्ध सूत्रों में आश्चर्यजनक समानता है।

III : *द्रुत विधि* (Quicker Approach) :

	A	:	B				
आय =	3	:	2	=	6	:	4
व्यय =	5	:	3				

A एवं B दोनों समान मात्रा (2000 रु) में बचत करते हैं।

चूँकि बचत = आय - व्यय, हमें अनुपात में पदों को इस प्रकार से परिवर्तित करना चाहिए कि A एवं B दोनों के लिए आय - व्यय समान हों। उपर्युक्त स्थिति में, यदि आय का अनुपात 3 : 2 परिवर्तित होकर 6 : 4 हो जाता है, तो हम देखते हैं कि 6 – 5 = 1 = 4 - 3.

इसप्रकार, आय के परिवर्तित अनुपात में 1, 2000 रु. के समतुल्य है।

इसलिए, A की आय = (6 × 2000 =) 12000 रु.

B की आय = (4 × 2000 =) 8000 रु.

A का व्यय = (5 × 2000 =) 10000 रु.

B का व्यय = (3 × 2000 =) 6000 रु.

उदा. 15: राम और श्याम की आय और व्यय का अनुपात क्रमशः 8 : 11 एवं 7 : 10 है। यदि उनमें से प्रत्येक 500 रु. की बचत करे तो उनके आय एवं व्यय की गणना करें। (सूत्र का प्रयोग अनिवार्य है।)

हल: प्रमेय के अनुसार,

a : b = 8 : 11 (आय)

c : d = 7 : 10 (व्यय)

X = 500 रु. (बचत)

$$\therefore \text{ राम की आय } = \frac{Xa(d-c)}{ad-bc} = \frac{500 \times 8(10-7)}{80-77} = 4000 \text{ रु.}$$

$$\text{श्याम की आय } = \frac{Xb(d-c)}{ad-bc} = \frac{500 \times 11(10-7)}{80-77} = 5500 \text{ रु.}$$

$$\text{राम का व्यय } = \frac{Xc(b-a)}{ad-bc} = \frac{500 \times 7(10-8)}{80-77} = 3500 \text{ रु.}$$

$$\text{श्याम का व्यय } = \frac{Xd(b-a)}{ad-bc} = \frac{500 \times 10(11-8)}{80-77} = 5000 \text{ रु.}$$

नोट: उपर्युक्त सूत्रों को याद रखना बड़ा आसान है। इनकी समझ विकसित करने के लिए अभ्यास जरूरी है। जहाँ कहीं भी इस तरह के प्रश्न को देखें उपर्युक्त सूत्रों के सहारे हल करने का प्रयास करें। हर बार सूत्र लिखना जरूरी नहीं है, बल्कि केवल गणना के अंक लिखें। उत्तर पलक झपकते मिल जाएगा।

द्रुत विधि **(Quicker Approach) :**

	A	:	B
आय =	8	:	11
व्यय =	7	:	10

बचत = आय - व्यय। उपर्युक्त स्थिति में, $8 - 7 = 1 = 11 - 10$.

इस प्रकार अनुपात में 1, 500 रु. के समतुल्य है।

$\therefore$ A की आय = $(8 \times 500 =)$ 4000 रु.

B की आय = $(11 \times 500 =)$ 5500 रु.

A का व्यय = $(7 \times 500 =)$ 3500 रु.

B का व्यय = $(10 \times 500 =)$ 5000 रु.

प्रमेय: यदि किसी दी गई राशियों का अनुपात a : b : c : d हो तो उन राशियों का, जो उपर्युक्त राशियों का व्युत्क्रमानुपाती है, का अनुपात,

$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}:\frac{1}{d}$ होता है।

उदा. 16: तीन कारों की चाल का अनुपात 2 : 3 : 4 है। इन कारों द्वारा समान दूरी तय करने में लगे समय का अनुपात बताएँ।

हल: आप यह जानते हैं कि चाल एवं समय एक दूसरे के व्युत्क्रमानुपाती हैं। अर्थात् यदि चाल अधिक हो तो समय कम लगेगा और यदि चाल कम हो तो समय अधिक लगेगा। इसलिए इस प्रश्न को हल करने में उपर्युक्त प्रमेय का प्रयोग किया जा सकता है।

$\because$ तीनों कारों द्वारा लिए गए समय का अनुपात $= \frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$

अब सभी अनुपातों को हर (2, 3, 4) के ल.स. (LCM) 12 से गुणा करें। इस प्रकार अभीष्ट

अनुपात $= \frac{12}{2}:\frac{12}{3}:\frac{12}{4} = 6:4:3$

उदा. 17: एक ही तरह का काम तीन दलों को सौंपा जाता है। दलों में व्यक्तियों की संख्या का अनुपात 3 : 4 : 5 है। उनके द्वारा कार्य पूरा करने में लगे दिनों की संख्या का अनुपात बताएँ।

हल: यहाँ भी व्यक्ति एवं दिनों की संख्या व्युत्क्रमानुपाती (inversely proportional) हैं। इसलिए इस प्रश्न में भी उपर्युक्त नियम लागू होगा।

$\therefore$ अभीष्ट अनुपात $= \frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}$

उपर्युक्त भिन्नों को 3, 4 एवं 5 के ल.स. (LCM) 60 से गुणा करने पर:

$\frac{60}{3}:\frac{60}{4}:\frac{60}{5} = 20:15:12$

प्रमेय: यदि दो संख्याओं का योगफल 'A' हो तथा उनका अंतर 'a' हो तो उन संख्याओं का अनुपात $A + a : A - a$ से व्यक्त किया जाता है।

प्रमाण: मान लिया कि दोनों संख्याएँ x एवं y हैं।

प्रश्नानुसार, $x + y = A$ ....(1)

एवं $x - y = a$ ....(2)

(1) + (2) से,

$2x = A + a$

$\therefore \quad x = \frac{A+a}{2}$

(1) − (2) से,

$2y = A - a$

$\therefore \quad y = \frac{A-a}{2}$

$\therefore$ दोनों संख्याओं का अनुपात $= x : y = \frac{A+a}{2} : \frac{A-a}{2} = A + a : A - a$

उदा. 18: दो संख्याओं का योगफल 40 है एवं उनका अंतर 4 है। दोनों संख्याओं का अनुपात बताएँ।

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार,

अभीष्ट अनुपात $= 40 + 4 : 40 - 4 = 44 : 36 = 11 : 9$

प्रमेय: वह संख्या, जिसे किसी अनुपात $a : b$ के दोनों पदों में जोड़ने पर अनुपात बदलकर $c : d$ हो जाता हो, का मान $\frac{ad - bc}{c - d}$ होता है।

प्रमाण: मान लिया कि अभीष्ट संख्या x है। तब $\frac{a+x}{b+x} = \frac{c}{d}$

या, $ad + dx = bc + cx$

या, $x(c - d) = ad - bc$

$\therefore \quad x = \frac{ad - bc}{c - d}$

उदा. 19: यदि किसी संख्या को अनुपात 11 : 23 के दोनों पदों में जोड़ने से अनुपात बदलकर 4 : 7 हो जाता हो तो वह संख्या बताएँ।

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार, यहाँ $a : b = 11 : 23$

एवं $c : d = 4 : 7$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= \frac{ad - bc}{c - d} = \frac{11 \times 7 - 23 \times 4}{4 \times 7} = \frac{15}{3} = 5$

***दूसरी द्रुत विधि* (Another Quicker Approach) :**

प्रारंभिक अनुपात = 11 : 23

अंतिम अनुपात = 4 : 7 = 16 : 28

इस स्थिति में, हमें दूसरे (अंतिम) अनुपात को इस तरह से परिवर्तित करना चाहिए कि अंतिम अनुपात का पूर्व पद (antecedent) – प्रारंभिक अनुपात का पूर्व पद (antecedent)

= अंतिम अनुपात का अंतिम पद - प्रारंभिक अनुपात का अंतिम पद

= जोड़ी जाने वाली अभीष्ट संख्या

यहाँ, 4 : 7 को परिवर्तित करके 16 : 28 कर दिया जाता है जिससे कि 16 – 11 = 5 = 28 – 23.

अत: अभीष्ट संख्या = 5

प्रमेय: वह संख्या, जिसे अनुपात a : b के दोनों पदों में से घटाने पर अनुपात बदलकर c : d हो जाता हो, का मान $\frac{bc-ad}{c-d}$ होता है।

प्रमाण: खुद प्रयास करें।

उदा. 20: यदि किसी संख्या को अनुपात 11 : 23 के दोनों पदों में से घटाने पर अनुपात बदलकर 3 : 7 हो जाता हो, तो वह संख्या क्या है?

हल: यहाँ, a : b = 11 : 23

c : d = 3 : 7

$$\therefore \text{ अभीष्ट संख्या } = \frac{bc-ad}{c-d} = \frac{23\times3-11\times7}{3-7} = \frac{8}{4} = 2$$

***दूसरी द्रुत विधि* (Another Quicker Approach) :**

प्रारंभिक अनुपात = 11 : 23

अंतिम अनुपात = 3 : 7 = 9 : 21

उदा. 19 में दिए गए अवधारणा (concept) को लागू करने पर, हम अंतिम अनुपात को परिवर्तित करके 9 : 21 कर देते हैं जिससे कि 11 - 9 = 23 - 21 = 2. इसलिए अभीष्ट संख्या 2 है।

उदा. 21: दो पीपों में पानी और दूध का मिश्रण है। दोनों पीपों में पानी और दुध के अनुपात क्रमश: 1:2 एवं 2:5 हैं। दोनों पीपों के मिश्रण को 1:4 के अनुपात में मिलाया जाता है। नए मिश्रण में पानी एवं दूध का अनुपात ज्ञात करें।

हल: अनुपातों को भिन्न में परिवर्तित कर दें।

	पानी	*दूध*
पीपा-I	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
पीपा-II	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$

पीपा-I से $\frac{1}{5}$ लिया जाता है एवं पीपा-II से $\frac{4}{5}$ लिया जाता है।

इसलिए,

नए पीपे में पानी एवं दूध का अनुपात $=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{7}\times\frac{4}{5}\right):\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{5}{7}\times\frac{4}{5}\right)$

$$=\left(\frac{1}{15}+\frac{8}{35}\right):\left(\frac{2}{15}+\frac{20}{35}\right) \quad =\left(\frac{31}{105}\right):\left(\frac{74}{105}\right)$$

$$=31:74$$

उदा. 22: पिछले वर्ष A एवं B की आय का अनुपात 3:4 था। A के पिछले वर्ष एवं इस वर्ष की आय का अनुपात 4:5 है तथा B के पिछले वर्ष एवं इस वर्ष की आय का अनुपात 2:3 है। यदि दोनों की कुल वर्तमान आय 4160 रुपये हों तो A की वर्तमान आय ज्ञात करें।

हल: वर्तमान आयों का अनुपात $=3\times\frac{5}{4}:4\times\frac{3}{2}$

$$=\frac{15}{4}:\frac{12}{2}=30:48=5:8$$

$\therefore$ A की वर्तमान आय $=\frac{4160}{5+8}\times 5=1600$ रुपए

उदा. 23: तीन ग्लासें A, B एवं C जिनकी क्षमता (Capacity) का अनुपात 2:3:4 है, स्पिरिट एवं पानी के मिश्रण से भरा हुआ है। स्पिरिट एवं पानी के अनुपात A, B एवं C में क्रमशः 1:5, 3:5 एवं 5:7 हैं। यदि तीनों ग्लासों के मिश्रण को एक साथ मिलाया जाता है तो नए मिश्रण में स्पिरिट एवं पानी का अनुपात ज्ञात करें।

हल:

	A	B	C
	2 :	3 :	4
स्पिरिट : पानी =	1:5	3:5	5:7

जब वे मिलाए जाते हैं तो स्पिरिट एवं पानी का अनुपात

$$=\left(2\times\frac{1}{1+5}+3\times\frac{3}{3+5}+4\times\frac{5}{5+7}\right):\left(2\times\frac{5}{1+5}+3\times\frac{5}{3+5}+4\times\frac{7}{5+7}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{9}{8}+\frac{5}{3}\right):\left(\frac{5}{3}+\frac{15}{8}+\frac{7}{3}\right)=\frac{25}{8}:\frac{47}{8}=25:47$$

उदा. 24: एक रुपया, 50 पैसे एवं 25 पैसे वाले कुल 465 सिक्के हैं। उनके मूल्यों का अनुपात 5:3:1 है। प्रत्येक सिक्का की संख्या ज्ञात करें।

हल: सिक्कों की संख्या का अनुपात $=5\times\frac{100}{100};3\times\frac{100}{5}:1\times\frac{100}{25}=5:6:4$

$\therefore$ एक रुपया वाले सिक्कों की संख्या $= \frac{465}{5+6+4} \times 5 = 155$

50 पैसे वाले सिक्कों की संख्या $= \frac{465}{5+6+4} \times 6 = 186$

25 पैसे वाले सिक्कों की संख्या $= \frac{465}{5+6+4} \times 4 = 125$

उदा. 25: एक रुपया, 50 पैसे एवं 5 पैसे वाले सिक्कों को 3:5:7 के अनुपात में मिलाया गया है। यदि कुल रकम 11.70 रुपये हों तो हर प्रकार के सिक्कों की संख्या ज्ञात करें।

हल: यह प्रश्न उदा.-24 से भिन्न है। उदा.-24 में मूल्यों का अनुपात दिया गया है परंतु इस प्रश्न में संख्याओं का अनुपात दिया गया है।
अब, प्रदत्त संख्याओं के अनुपात को मूल्यों के अनुपात में परिवर्तित करना होगा। (जबकि, उदा.-24 में, मूल्यों के अनुपात को संख्याओं के अनुपात में परिवर्तित किया गया था।)

$\therefore$ मूल्यों का अनुपात $= 3 \times \frac{100}{100} : 5 \times \frac{50}{100} : 7 \times \frac{5}{100}$

$= 300 : 250 : 35 = 60 : 50 : 7$

$\therefore$ एक रुपया वाले सिक्कों का मूल्य $= \frac{11.70}{60+50+7} \times 60$ = 6 रु. या 6 सिक्के

50 पैसे वाले सिक्कों का मूल्य $= \frac{11.70}{60+50+7} \times 50$ = 5 रु. या 10 सिक्के

5 पैसे वाले सिक्कों का मूल्य $= \frac{11.70}{60+50+7} \times 7$ = 0.7 रु. या $0.7 \times 20 = 14$ सिक्के

उदा. 26: एक साल पहले, लक्ष्मण एवं गोपाल के आमदनी का अनुपात 3:5 था। दोनों के पिछले वर्ष एवं इस वर्ष के व्यक्तिगत आमदनियों के अनुपात क्रमशः 2:3 एवं 4:5 हैं। यदि वर्तमान वर्ष में दोनों की कुल आमदनी 4300 रुपये हों तो लक्ष्मण की वर्तमान आमदनी क्या है?

हल: लक्ष्मण के दो वर्षों की आमदनी का अनुपात =2:3
गोपाल के दो वर्षों की आमदनी का अनुपात = 4:5
दिया हुआ है कि पिछले वर्ष उनके आमदनियों का अनुपात = 3:5
अब, पहले दोनों अनुपातों के पूर्व पदों (2 एवं 4) को हम इस प्रकार परिवर्तित करते हैं कि पहले अनुपात में पूर्व पद 3 हो जाए (तीसरे अनुपात का पूर्व पद) एवं दूसरे अनुपात में पूर्व पद 5 हो जाए (तीसरे अनुपात का पहला पद)।

इस प्रकार, 2:3 = $3 : \frac{9}{2}$ एवं 4:5 = $4\left(\frac{5}{4}\right) : 5\left(\frac{5}{4}\right) = 5 : \frac{25}{4}$

अब, यह स्पष्ट है कि, उनके वर्तमान आमदनियों का अनुपात $= \frac{9}{2} : \frac{25}{4} = 18 : 25$

$\therefore$ लक्षमण की वर्तमान आमदनी $= \frac{4300}{18+25} \times 18 = 1800$ रुपये

नोट: आपको उपर्युक्त विधि को अच्छी तरह समझ लेना चाहिए। यदि आप ऐसा करते हैं तो बहुत ही आसानी से उत्तर तक पहुँच सकते हैं। क्या होगा यदि प्रश्न निम्न प्रकार से दिया गया हो?

'उनके आमदनियों का वर्तमान अनुपात 18:15 है एवं उनके व्यक्तिगत आमदनियों के अनुपात दो वर्षों के लिए 2:3 एवं 4:5 हैं। उनकी कुल आमदनी पिछले वर्ष 3200 रुपए थी। और आपको लक्षमण के पिछले वर्ष की आमदनी ज्ञात करने को कहा जाता है।'

अब, हम उपर्युक्त विधि का प्रयोग अंतिम पदों (**consequents**) के लिए करते हैं।

$2:3 = 2 \times 6 : 3 \times 6 = 12 : 18$

$4:5 = 4 \times 5 : 5 \times 5 = 20 : 25$

इस प्रकार, पिछले वर्ष उनकी आमदनियों का अनुपात 12:20 = 3:5

$\therefore$ लक्षमण की पिछले वर्ष की आमदनी $= \frac{3200}{3+5} \times 3 = 1200$ रुपये

उदा. 27: एक बाल्टी में दो द्रव A एवं B के मिश्रण 7:5 के अनुपात में हैं। यदि बाल्टी में से 9 लिटर मिश्रण निकालकर उसकी जगह 9 लिटर द्रव B डाल दिया जाए तो दोनों द्रवों का अनुपात 7 : 9 हो जाता है। बाल्टी में द्रव A की मात्रा कितनी है?

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method):**

माना कि दो द्रव A एवं B क्रमश: $7x$ लिटर एवं $5x$ लिटर हैं।

अब, प्रश्नानुसार, 9 लिटर मिश्रण निकाल लिया जाता है

A बचता है, $7x - 9\left(\frac{7}{7+5}\right) = 7x - \frac{9 \times 7}{12} = \left(7x - \frac{21}{4}\right)$ लिटर

एवं B बचता है, $5x - 9\left(\frac{5}{7+5}\right) = 5x - \frac{9 \times 5}{12} = \left(5x - \frac{15}{4}\right)$ लिटर

अब, जब 9 लिटर द्रव B मिलाया जाता है,

$$\left(7x - \frac{21}{4}\right) : \left(5x - \frac{15}{4} + 9\right) = 7 : 9$$

या, $$\frac{7x - \frac{21}{4}}{5x - \frac{15}{4} + 9} = \frac{7}{9}$$

या, $63x - \frac{189}{4} = 35x - \frac{105}{4} + 63$

या, $28x = \frac{189}{4} - \frac{125}{4} + 63 = 21 + 63 = 84$

या, $x = \frac{84}{28} = 3$

$\therefore\ 7x = 7 \times 3 = 21$ लिटर

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

यदि हम बीच के चरणों को नजरअंदाज करते हैं तो हमें एक सूत्र प्राप्त होता है जो कि न केवल आसानी से प्रयोग में लाया जा सकता है बल्कि उसे याद रखना भी काफी आसान है।

पहला अनुपात =7:5, दूसरा अनुपात = 7:9

D = अनुपातों के वज्र-गुणनफलों (cross-products) का अंतर

$= 7 \times 9 - 7 \times 5 = 63 - 35 = 28$

अब निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं :

पहले अनुपात का सार्व गुणनखंड (common factor)

$$= \left[\frac{\text{निकाले एवं डाले गए द्रव की मात्रा}}{\text{पहले अनुपात के पदों का योग}}\right] + \left[\frac{(\text{निकाले एवं डाले गए द्रव की मात्रा}) \times (\text{दूसरे अनुपात में पद A})}{D}\right]$$

$$= \left[\frac{9}{7+5}\right] + \left[\frac{9 \times 7}{28}\right] = \frac{9}{12} + \frac{9}{4} = \frac{36}{12} = 3$$

$\therefore$ A की मात्रा $= 7 \times 3 = 21$ लिटर

उसी प्रकार, B की मात्रा $= 5 \times 3 = 15$ लिटर

उदा. 28: एक मालिक अपने कर्मचारियों की छँटनी 10:9 के अनुपात में करता है एवं उनकी मजदूरी 11:12 के अनुपात में बढ़ा देता है। उनके दोनों व्ययों का अनुपात क्या है?

हल: अभीष्ट अनुपात $= 10 \times 11 : 9 \times 12 = 55 : 54$

उदा. 29: एक पीपा में दो द्रव A एवं B 5:3 के अनुपात में हैं। यदि मिश्रण का 16 लिटर निकालकर उसकी जगह पर उतनी ही मात्रा में द्रव B मिला दिया जाता है तो अनुपात 3:5 हो जाता है तो पीपा में द्रव की कुल कितनी मात्रा रखी जा सकती है?

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method):**

मान लिया कि पीपा में द्रव A एवं B क्रमशः $5x$ लिटर एवं $3x$ लिटर है।

निकाले गए मिश्रण में द्रव A की मात्रा $= \frac{16}{5+3} \times 5 = 10$ लिटर

एवं द्रव B की मात्रा = 16–10 = 6 लिटर

अब, $(5x-10):(3x-6+16)=3:5$

या, $\frac{5x-10}{3x+10} = \frac{3}{5}$

या, $25x-50 = 9x+30$

या, $16x = 80 \therefore x = 5$

$\therefore$ पीपा में $8x = 8 \times 5 = 40$ लिटर द्रव रखा जा सकता है।

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

जब अनुपात व्युत्क्रम (reverse) हो जाता है (अर्थात् 5:3, 3:5 हो जाता है) तो हम निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं:

कुल मात्रा $= \frac{(5+3)^2}{5^2-3^2} \times$ (निकाले गऐ मिश्रण में A की मात्रा)

$= \frac{64}{16} \times 10 = 40$ लिटर

नोट: जब द्रव A को फिलर (filler) की तरह प्रयोग किया जाता है तो सूत्र में 'B की मात्रा' का प्रयोग करते हैं।

***दूसरी द्रुत विधि* (Another Quicker Approach) :**

निकाली गई मात्रा में, A 10 लिटर है तथा B 6 लिटर है।

पुन : B का 16 लिटर मिलाया जाता है। इसका तात्पर्य है कि नए मिश्रण में A 10 लिटर कम है तथा B (16 - 6=) 10 लिटर अधिक है।

अब अनुपातों पर नजर डालते हैं।

प्रारंभिक अनुपात = 5 : 3

अंतिम अनुपात = 3 : 5

ध्यान दें कि अंतिम अनुपात में पूर्व पद (antecedent) (5 - 3 =) 2 कम है तथा अंतिम पद (consequent) (5 - 3 =) 2 अधिक है।

इसका तात्पर्य है कि अनुपात में 2, 10 लिटर के समतुल्य है।

इसलिए कुल मात्रा $= \frac{10}{2}(5+3) = 40$ लिटर

उदा. 30: यदि $(a+b):(b+c):(c+a) = 6:7:8$ एवं $a+b+c = 14$, तो $a:b:c$ का मान तथा a, b एवं c का मान ज्ञात करें।

हल: हम जानते हैं कि,

$$a+b=\frac{6}{6+7+8}[(a+b)+(b+c)+(a+c)]$$

$$=\frac{6}{21}[2(a+b+c)]=\frac{6}{21}\times 28=8$$

उसी प्रकार, $b+c=\frac{7}{6+7+8}[2(a+b+c)]=\frac{7}{21}\times 28=\frac{28}{3}$

एवं $a+c=\frac{8}{21}\times 28=\frac{32}{3}$

अब, $a=[(a+b+c)-(b+c)]=14-\frac{28}{3}=\frac{14}{3}$

उसी प्रकार, $b=14-\frac{32}{3}=\frac{10}{3}$ एवं $c=14-8=6$

इस प्रकार, $a=\frac{14}{3}, b=\frac{10}{3}$ एवं $c=6$

$\therefore\ a:b:c=\frac{14}{3}:\frac{10}{3}:6=14:10:18=7:5:9$

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

$(a+b):(b+c):(c+a)=6:7:8$

अब, $[(a+b)+(b+c)+(c+a)]:(a+b):(b+c):(c+a)$
$=(6+7+8):6:7:8$

या, $2(a+b+c):(a+b):(b+c):(c+a)=21:6:7:8$

या, $(a+b+c):(a+b):(b+c):(c+a)=10.5:6:7:8$

अब, $a:b:c=(10.5-7):(10.5-8):(10.5-6)=3.5:2.5:4.5=7:5:9$

$$\therefore\ a=\frac{14}{7+5+9}\times 7=\frac{14}{3}$$

$$b=\frac{14}{7+5+9}\times 5=\frac{10}{3}$$

$$c=\frac{14}{7+5+9}\times 9=6$$

उदा. 31: समान ऊँचाई की दो मोमबत्तियाँ एक ही समय पर जलाई जाती हैं। पहली मोमबत्ती 7 घंटे में और दूसरी मोमबत्ती 4 घंटे में पूरी जल जाती है। मान लीजिए कि दोनों मोमबत्तियाँ स्थिर गति से जलती हैं। बताइए कि प्रज्ज्वलित होने के कितने घंटे बाद पहली मोमबत्ती

की ऊँचाई दूसरी मोमबत्ती की ऊँचाई की चार गुनी हो जाएगी ?

हल : ***विस्तार विधि* (Detail Method) :** माना कि मोमबत्तियों की ऊँचाई h है तथा x घंटे बाद पहली मोमबत्ती की ऊँचाई दूसरी मोमबत्ती की ऊँचाई की 4 गुनी है।

अब, x घंटे बाद पहली मोमबत्ती की ऊँचाई $= h - \frac{xh}{7} = \frac{7h - xh}{7}$

तथा, x घंटे बाद दूसरी मोमबत्ती की ऊँचाई $= h - \frac{xh}{4} = \frac{4h - xh}{4}$

अब, प्रश्नानुसार, $\frac{7h - xh}{7} : \frac{4h - xh}{4} = 4 : 1$

या, $\frac{(7h - xh)4}{7(4h - xh)} = \frac{4}{1}$

या, $28 - 4x = 112 - 28x$

या, $24x = 84 \quad \therefore \; x = \frac{84}{24} = 3.5$ घंटे = 3 घंटे 30 मिनट

***सूत्र विधि* (Direct Formula) :**

यदि समान ऊँचाई की दो मोमबत्तियों में से पहली मोमबत्ती T_1 घंटे में पूरी जलती है तथा दूसरी मोमबत्ती T_2 घंटे में पूरी जलती है, तो $\frac{T_1T_2(a - b)}{aT_1 - bT_2}$ घंटे बाद बचे हुए भाग की ऊँचाई का अनुपात *a* : *b* होगा।

इसलिए उपर्युक्त स्थिति में, $T_1 = 7$ घंटा, $T_2 = 4$ घंटा,

$a = 4$ एवं $b = 1$

$\therefore$ अभीष्ट समय $= \frac{7 \times 4(4 - 1)}{4 \times 7 - 1 \times 4} = \frac{84}{24} = 3.5$ घंटा

उदा. 32: एक कंटेनर में 80 कि.ग्रा. दूध है। इस कंटेनर से 8 कि.ग्रा. दूध निकालकर उसकी जगह पानी मिलाया जाता है। इस प्रक्रिया को दो बाद दुहराया जाता है। अब कंटेनर में कितना दूध है?

हल : इस प्रकार के प्रश्न को हल करने का सबसे आसान तरीका है निकाले गए द्रव को मूल आयतन का प्रतिशत या अनुपात में व्यक्त करना। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित व्याख्या पर नजर डालें : चूँकि 8 कि.ग्रा. 80 कि.ग्रा. का 10% है, अत: प्रत्येक निकासी में दूध का

10% निकाला जाता है, जिसका तात्पर्य है कि प्रत्येक क्रिया के बाद मिश्रण में दूध के पहले आयतन का 90% शेष रहता है।

	दूध	**पानी**
मूलत :	80 कि.ग्रा.	0 कि.ग्रा.
पहली क्रिया के बाद :	80 (90%)=72 कि.ग्रा.	80 (10%) = 8 कि.ग्रा.
दूसरी क्रिया के बाद :	72(90%)=64.8 कि.ग्रा.	8 कि.ग्रा.+72 का 10% =15.2 कि.ग्रा.
तीसरी क्रिया के बाद :	64.8 (90%) =58.32 कि.ग्रा.	15.2 कि.ग्रा. + 64.8 का 10% = 21.68 कि.ग्रा.

यदि हम उपर्युक्त सारणी का सरलीकरण करते हैं तो हम कह सकते हैं कि

तीसरा क्रिया के बाद मिश्रण में दूध की मात्रा $= 80\left(\frac{90}{100}\right)^3$.

उसी प्रकार, *n*वीं क्रिया के बाद मिश्रण में दूध की मात्रा $= 80\left(\frac{90}{100}\right)^n$

इसी चीज को हम अनुपात में प्रस्तुत कर सकते हैं जैसा कि नीचे दिया गया है :

*n*वीं क्रिया के बाद दूध की मात्रा $= 80\left(\frac{80-8}{80}\right)^n$

(क्योंकि प्रत्येक क्रिया के बाद दूध निम्नलिखित अनुपात में परिवर्तित हो जाता है 72 : 80 या 9 : 10, अर्थात् 10 से 9 तक)

नोट : उपर्युक्त प्रश्न का सबसे अधिक प्रचलित प्रारूप (generalised format) निम्नलिखित है: 'एक कंटेनर जिसमें 'X' लिटर दूध है, x लिटर निकालकर उसकी जगह पर उतना ही पानी मिला दिया जाता है। यह प्रक्रिया 'n' बार दुहराई जाती है तो nवीं क्रिया के बाद कंटेनर में बचे हुए दूध की मात्रा $= X\left(\frac{X-x}{X}\right)^n$ लिटर

***उदा.* 33 :** एक कंटेनर दूध से भरा हुआ है। 9 लिटर दूध निकालकर कंटेनर में उतना ही पानी भर दिया जाता है। पुन:, 9 लिटर मिश्रण निकालकर कंटेनर को पुन: पानी से भर दिया जाता है। अब कंटेनर में बचे दूध की मात्रा तथा पानी का अनुपात 16 : 9 है। कंटेनर में दूध की मूल मात्रा ज्ञात करें।

हल : उपर्युक्त उदाहरण को हल करने के लिए हमें ***उदा.* 32** में दिए गए सूत्र को अच्छी तरह से समझ लेना चाहिए। nवीं क्रिया के बाद बचे दूध की मात्रा

$= $ दूध की मूल मात्रा (अर्थात् X) $\left(\frac{X-x}{X}\right)^n$

या, $\frac{\text{n}\text{वीं क्रिया के बाद बचे दूध की मात्रा}}{\text{दूध की मूल मात्रा}} = \left(\frac{X-x}{X}\right)^n$

इस स्थिति में, $\left(\frac{16}{16+9}\right) = \left(\frac{X-9}{X}\right)^2$ ..... (*)

या, $\frac{X-9}{X} = \frac{4}{5}$

$\therefore$ X = 45 लिटर

नोट **:** समी. (*) में LHS (अर्थात्) $\frac{16}{16+9}$ के संबंध में आप भ्रमित (confused) हो सकते हैं।

वस्तुतः, अंतिम मिश्रण में दूध एवं पानी का अनुपात 16 : 9 है। इसका तात्पर्य है कि अंतिम मिश्रण में दूध तथा कुल दूध एवं पानी (जो कि दूध की मूल मात्रा के समान है) के बीच का अनुपात अवश्य ही 16 : (16 + 9) होना चाहिए।

उदा. 34 : एक कंटेनर स्पिरिट से भरा हुआ है। 40 लिटर स्पिरिट निकाल लिया जाता है तथा कंटेनर को पानी से भर दिया जाता है। यह प्रक्रिया तीन बार दुहराई जाती है। अब, कंटेनर में स्पिरिट एवं पानी का अनुपात 27 : 98 है। कंटेनर की धारिता (capacity) ज्ञात करें।

हल : ***उदा.*** **- 33** में दिए गए सूत्र का इस्तेमाल करें।

$$\frac{\text{तीसरी क्रिया के बाद स्पिरिट की मात्रा}}{\text{कंटेनर की धारिता (या, दूध की मूल मात्रा)}} = \left(\frac{X-40}{X}\right)^3$$

या, $\frac{27}{27+98} = \left(\frac{X-40}{X}\right)^3$

या, $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{X-40}{X}\right)^3$

या, $\frac{X-40}{X} = \frac{3}{5}$

$\therefore$ X = 100 लिटर।

अनुपात और समानुपात

1. A : B : C का अनुपात 3 : 2 : 5 है। ₹ 500 में से C को कितने ₹ मिलेंगे?
   (1) ₹ 200 (2) ₹ 250
   (3) ₹ 300 (4) ₹ 350

2. यदि a : b का अनुपात 3 : 4, b : c का अनुपात 2 : 5, तो a : b : c है?
   (1) 3 : 4 : 10 (2) 3 : 5 : 2
   (3) 3 : 4 : 5 (4) 3 : 2 : 2

3. यदि A : B = 1 : 2, B : C = 3 : 2 और C : D is 1 : 3 है तो A : B : C : D क्या होगा?
   (1) 3 : 6 : 9 : 12 (2) 3 : 4 : 8 :10
   (3) 2 : 6 : 8 : 10 (4) 3 : 6 : 4 : 12

4. ₹ 5600 को A, B, C, D के बीच में इस प्रकार बांटा जाता है कि A और B, B और C, और C और D के हिस्सों का अनुपात क्रमश: 1 : 2, 3 : 1, और 2 : 3 है तब A और C, और B और C के हिस्सों का योग ज्ञात कीजिए।
   (1) ₹ 2400, ₹ 3000
   (2) ₹ 2000, ₹ 3000
   (3) ₹ 2000, ₹ 3200
   (4) ₹ 2400, ₹ 3200

5. a : b = 2 : 1
   b : c = 1 : 3
   c : d = 2 : 3
   d : e = 1 : 2
   है, तो a : b : c : d : e ज्ञात कीजिए।
   (1) 4 : 2 : 6 : 9 : 18
   (2) 4 : 3 : 6 : 9 :18
   (3) 2 : 4 : 8 : 10 : 12
   (4) 5 : 4 : 8 : 12 : 18

6. यदि a : b : c = 1 : 3 : 2 और c : d : e = 1 : 2 : 3 है तो a : b : c : d : e ज्ञात कीजिए।
   (1) 1 : 2 : 3 : 4 : 5
   (2) 1 : 3 : 2 : 4 : 6
   (3) 1 : 4 : 3 : 2 : 6
   (4) 1 : 6 : 3 : 2: 4

7. कुल राशि को पुरुषों और महिलाओं में क्रमश: 6 : 5 अनुपात में बांटा जाता है, जबकि उनकी आय का अनुपात 2 : 3 है। पुरुष और महिलाओं की संख्याओं का अनुपात है।
   (1) 5 : 9 (2) 5 : 7
   (3) 7 : 5 (4) 9 : 5

8. अगर कर्मचारियों की संख्या को 3 : 2 के अनुपात में घटाया जाए और उनके वेतन को 4 : 5 के अनुपात में बढाया जाए तो कम्पनी को ₹ 12000 की बचत होती है। कम्पनी का व्यय पहले क्या था?
   (1) ₹ 72000 (2) ₹ 62000
   (3) ₹ 82000 (4) ₹ 52000

9. एक वर्ष पहले A और B के आय का अनुपात 3 : 2 था। A और B के आय में बढ़ोतरी का अनुपात क्रमश: 2 : 3 और 3 : 4 है। दोनों के कुल आय का योग ₹ 21500 है तो B की आय ज्ञात करें?
   (1) ₹ 6000 (2) ₹ 7000
   (3) ₹ 8000 (4) ₹ 9000

10. A और B के आय का अनुपात 3 : 4 है। दोनों के खर्च का अनुपात 2 : 3 है और हर एक की बचत ₹ 200 है तो A और B की आय है?
   (1) ₹ 500, 600 (2) ₹ 600, 800
   (3) ₹ 600, 900 (4) ₹ 800, 1000

11. A और B के आय का अनुपात 3 : 2 है और उनके खर्च का अनुपात 4 : 3 है तथा उनकी बचत क्रमशः ₹ 2000 और ₹ 1000 है। A और B की आय ज्ञात कीजिए।
(1) ₹ 3000, ₹ 4000
(2) ₹ 4000, ₹ 6000
(3) ₹ 5000, ₹ 6000
(4) ₹ 6000, ₹ 4000

12. A, B और C के कुल खर्च का अनुपात क्रमशः 16 : 12 : 9 और उनकी बचत उनके आय का 20%, 25% और 40% क्रमशः है। यदि उनकी आय का योग ₹ 1530 है, तो B की आय है?
(1) ₹ 480 (2) ₹ 490
(3) ₹ 500 (4) ₹ 510

13. A, B और C के आय का अनुपात क्रमशः 3 : 7 : 4 और व्यय का अनुपात 4 : 3 : 5 है। यदि A अपनी आय ₹ 2400 में से ₹ 300 बचत करता है तो C की बचत क्या है ?
(1) ₹ 565 (2) ₹ 570
(3) ₹ 575 (4) ₹ 580

14. क्रमानुसार दो वर्षों के आय का अनुपात 2 : 3 है और खर्च का अनुपात 5 : 9 है। यदि दूसरे वर्ष में आय ₹ 45000 है और प्रथम वर्ष का खर्च ₹ 25000 है, तो दोनों वर्ष की कुल बचत क्या है?
(1) ₹ 4000 (2) ₹ 5000
(3) ₹ 6000 (4) ₹ 7000

15. A, B, और C अकेले किसी काम को क्रमशः 30, 50 और 40 दिनों में पूरा करते हैं। उनके प्रत्येक दिन की आय का अनुपात क्रमशः 4 : 3 : 2 है। यदि A की कुल आय ₹ 144 है, तो B की कुल आय ज्ञात कीजिए।
(1) ₹ 180 (2) ₹ 185
(3) ₹ 190 (4) ₹ 198

16. एक व्यक्ति एक निश्चित दूरी ट्रेन, बस और कार द्वारा क्रमशः 4 : 3 : 2 अनुपात में तय में करता है। उनके किराए का अनुपात क्रमशः 1 : 2 : 4 है। कुल किराया ₹ 720 लगता है, तो बस द्वारा कितना किराया लगेगा?
(1) ₹ 140 (2) ₹ 150
(3) ₹ 160 (4) ₹ 170

17. दो संख्याओं का अनुपात क्रमशः 4 : 5 है। प्रत्येक संख्या में से 25 घटाते है तो अनुपात 3 : 4 हो जाता है। दूसरी संख्या का ज्ञात कीजिए।
(1) 120 (2) 125
(3) 130 (4) 135

18. सोने की कीमत उसके भार के वर्ग के समानुपाती है। एक व्यक्ति सोने के भार को 3 : 2 : 1 के अनुपात में बांटकर बेचता है और इसमें उसे कुल ₹ 4620 की हानि होती है तो सोने का प्रारंभिक मूल्य ज्ञात कीजिए।
(1) ₹ 7520 (2) ₹ 7530
(3) ₹ 7540 (4) ₹ 7560

19. A, B के घन के व्युत्क्रमानुपाती है। यदि A = 3 है, तो B = 2 है। अगर $A = \frac{8}{9}$ है, तो B का मान ज्ञात करें।
(1) 3 (2) 4
(3) 5 (4) 6

20. ₹ 7800 को A, B और C में इस तरह बांटा जाता है कि A को प्राप्त राशि B का $\frac{3}{4}$ भाग है और B को प्राप्त राशि C का $\frac{2}{3}$ भाग है तो B और C के प्राप्त राशि का अंतर ज्ञात कीजिए।
(1) ₹ 1000 (2) ₹ 1100
(3) ₹ 900 (4) ₹ 1200

21. एक थैले में ₹ 5, ₹ 2 और ₹ 1 के सिक्के हैं, जिनका योग ₹ 410 है। सिक्कों की संख्याओं का अनुपात क्रमशः 4 : 6 : 9 है तो थैले में ₹ 2 के कितने सिक्के हैं?
(1) 40 (2) 50
(3) 60 (4) 70

22. एक थैले में ₹ 55 के ₹ 1.50 पैसे और 25 पैसे के सिक्के है तथा उनका अनुपात क्रमशः 1 : 2 : 3 है। थैले में 50 पैसे के सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए।
(1) ₹ 41 (2) ₹ 42
(3) ₹ 40 (4) ₹ 38

23. 63 किग्रा मिश्र धातु में तांबा और जस्ता का अनुपात क्रमशः 4 : 3 है। तांबा की कुछ मात्रा मिश्र धातु से निकालने के पश्चात् तांबा और जस्ता का अनुपात 10 : 9 हो जाता है, तो कितनी मात्रा में तांबा निकाला गया?

(1) 6 किग्रा०
(2) 8 किग्रा०
(3) 12 किग्रा०
(4) 10 किग्रा०

24. पृथ्वी पर भूमि और जल का अनुपात क्रमशः 1 : [illegible] है। उत्तरी गोलार्ध में यह अनुपात 2 : 3 है तो दक्षिणी गोलार्ध में अनुपात क्या है?

(1) 2 : 11
(2) 4 : 11
(3) 3 : 11
(4) 5 : 11

विस्तारपूर्वक उत्तर:-

1;2 $A = \frac{3}{3+2+5} \times 500 = \frac{3}{10} \times 500$

$= ₹\ 150$

$B = \frac{2}{3+2+5} \times 500 = \frac{2}{10} \times 500 = ₹\ 100$

$C = \frac{5}{10} \times 500 = ₹250$

लघु विधि:-

A : B : C

3 : 2 : 5 ⇒ 10 (कुल)

×50 ×50 ×50

150 , 100 250 = 500 (दिया है)

2;1 a : b ↓3 : 4↓
b : c 2 ↓ 5

6 8 20 ⇒ 3 : 4 : 10

b को a से, b को b से, b को c से गुणा करें हमें उत्तर प्राप्त होगा।

नोट:- जब ऐसी स्थिति दी हो तो

a : b
3 : 4
b : c
2 : 5

⇓ (इसे ऐसे सरल किया जा सकता है)

a : b : c

3 : 4 : 4
: $2^{\times 2}$: $5^{\times 2}$ [दोनों स्थिति में b को समान रखें। यदि 2 को 2 से गुणा करते हैं, तो 5 को भी 2 से गुणा करना होगा, क्योंकि हमें अनुपात बराबर रखना है]

⇒ 3 : 4 : 10

पैरामाउंट विधि:-

3;4 पहले ज्ञात करें A : B : C : D

1 : 2 → ② → ②
③ ← 3 : 2 → ②
① ① 1 : 3

A : B : C : D = 3 : 6 : 4 : 12

नोट- यह विधि समझने के लिए याद रखें बाएं पक्ष के विलुप्त संख्या को समान रखे और यही तरीका दाहीने पक्ष के लिए अपनाएं

माना की आपके पास है

A : B = 1 : 2

B : C = 4 : 5

अब, A : B : C

1 : 2 ⤻ 2 [C को भी 2 बनाए जैसा की निकटतम संख्या 2 है]

4 ⤺ 4 : 5 [A को भी 4 बनाए जैसा की निकटतम संख्या 4 है।]

A : B : C
1 : 2 : ②
↑ ↑ ↑ = गुणा
④ : 4 : 5
4 : 8 : 10 = 2 : 4 : 5

पैरामाउंट विधि:-

4;3 पहले ज्ञात करें A : B : C : D

A : B = 1 : 2
B : C = 3 : 1
C : D = 2 : 3

A : B : C : D
1 : 2 → ② → ②
③ ← 3 : 1 → ①
② ← ② ← 2 : 3
6 12 4 6 = 3 : 6 : 2 : 3

$A + C \text{ का हिस्सा} = \frac{A+C}{A+B+C+D} \times 5600$

$= \frac{3+2}{3+6+2+3} \times 5600$

$= \frac{5}{14} \times 5600 = ₹\ 2000$

$B + C \text{ का हिस्सा} = \frac{B+C}{A+B+C+D} \times 5600$

$= \frac{6+2}{3+6+2+3} \times 5600$

$= \frac{8}{14} \times 5600 = ₹\ 3200$

दूसरी विधि:-

$$\begin{array}{ccccccc} A & : & B & : & C & : & D \\ 1 & : & 2 \rightarrow & & ② \rightarrow & & ② \\ ③ \leftarrow & & 3 & : & 1 \rightarrow & & ① \\ ② \leftarrow & & ② \leftarrow & & 2 & : & 3 \\ \hline 6 & : & 12 & : & 4 & : & 6 \\ 3 & : & 6 & : & 2 & : & 3 = 14 \text{ (कुल)} \\ \times 400\downarrow & & \times 400\downarrow & & \times 400\downarrow & & \times 400\downarrow \quad \downarrow \times 400 \\ 1200 & & 2400 & & 800 & & 1200 \quad 5600 \\ A & & B & & C & & D \end{array}$$

[14 को 400 से गुणा करें, हम पाते हैं 5600 इसलिए पूरे अनुपात को 400 से गुणा करें]

A + C = 2000

B + D = 3200

5;1 लघु विधि:-

$$\begin{array}{ccccccccc} A & : & B & : & C & : & D & : & E \\ 2 & : & 1 & \rightarrow & ① & \rightarrow & 1 & : & ① \\ ① & \leftarrow & 1 & : & 3 & \rightarrow & ③ & : & ③ \\ ② & \leftarrow & ② & \leftarrow & 2 & : & 3 & : & ③ \\ ① & : & ① & : & ① & \leftarrow & 1 & : & 2 \\ \hline 4 & : & 2 & : & 6 & : & 9 & : & 18 \end{array}$$

6;2

$$\begin{array}{ccccccccc} A & : & B & : & C & : & D & : & E \\ 1 & : & 3 & : & 2 & \rightarrow & ② & : & ② \\ ① & : & ① & \leftarrow & 1 & : & 2 & : & 3 \\ \hline 1 & : & 3 & : & 2 & : & 4 & : & 6 \end{array}$$

7;4 पुरुषों का वेतन: महिलाओं का वेतन

प्रत्येक पुरुष का वेतन : प्रत्येक महिला का वेतन

यदि a : b ::c : d है,तो $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{6}{5} = \frac{2}{3}$

इसलिए, ad = cd

$6 \times 3 : 5 \times 2$

पुरुषों की संख्या : महिलाओं की संख्या

= 18 : 10 = 9 : 5

8;1

	प्रारंभिक		अंतिम	
कर्मचारी	3	:	2	(गुणा)
प्रत्येक का वेतन	4	:	5	
कुल खर्च	12	:	10	

कुल खर्च में कमी = 12 − 10

= 2 इकाई

2 इकाई = ₹ 12,000 (दिया है कि ₹ 12000 की बचत करता है)

∴ 1 इकाई = 6000

∴ वेतन पर प्रारम्भिक खर्च = 12 × 6000

= ₹ 72,000

9;3 A : B

3 : 2

A की आय में बढ़ोत्तरी का अनुपात 2 : 3 है।

मतलब यह पहले 2 थी, अब 3 है।

इसलिए हमें इसे 3 पर सरल करेंगे।

$2 \xrightarrow{\text{हो जाता है}} 3$ तो

$3 \xrightarrow{\text{हो जाता है}} \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$

उसी तरह B की आय में बढ़ोत्तरी का अनुपात 3 : 4 है।

$3 \xrightarrow{\text{हो जाता है}} 4$ तो,

$2 \xrightarrow{\text{हो जाता है।}} \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$

↓

A : B = 3 : 2

A और B की नई वतेन का अनुपात = $4.5 : \frac{8}{3}$

$\text{...} = \frac{8}{21.5} \times 21500$

= ₹8000

10;2

	A	:	B
आय =	$3(x)$	:	$4(x)$
खर्च =	2	:	3

प्रत्येक की बचत = ₹ 200

$\therefore \frac{3x - 200}{4x - 200} = \frac{2}{3}$ (आय − बचत = खर्च)

A की आय = $3x$ = ₹ 600

B की आय = $4x$ = ₹ 800

लघु विधि :-

A ⟶ 600 (×200) B ⟶ 800 (×200)

आय:- 3 4 घटाएं जैसे,

खर्च :- 2 3 आय - खर्च = बचत

बचत:- 1 : 1

×200

200 (दिया है)

11;2

	A	:	B
आय =	3(x)	:	2(x)
खर्च =	4	:	3

अब :- $\frac{3x-2000}{2x-1000} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow 9x - 6000 = 8x - 4000$

$\Rightarrow x = 2000$

A की आय = $3x$ = 6000

B की आय = $4x$ = 4000

लघु विधि :-

	A	:	B
आय:-	$3^{\times 2}$		$2_{\times 2}$
खर्च:-	4		3
	2	:	1

[अनुपात को 2 से गुणा करने पर.]

×1000 ×1000

2000 (दिया है) 1000 (दिया है)

इसलिए आय को 1000 से गुणा करें

A : B = 6 : 4 = 6× 1000
= 4 ×1000
= 6000 :4000

12;1

	A		B		C
खर्च	16	:	12	:	9
बचत	20%	:	25%	:	40%

आय का अनुपात = $\frac{16}{80}\times100$ $\frac{12}{75}\times100$ $\frac{9}{60}\times100$

= 20 : 16 : 15 = 51 (कुल)

यदि 51 = 1530

1 = 30

इसलिए, 16 = 480

लघु विधि :-

	A	B	C
आय:-	x	y	z
बचत:-	$\frac{20}{100}x$	$\frac{25}{100}y$	$\frac{40}{100}z$
खर्च:-	16 :	12 :	9

$x - \frac{20}{100}x = 16$ (चूंकि; आय - खर्च = बचत)

$\frac{80x}{100} = 16$

$x = \frac{1600}{80} = 20,$ **A = 20**

$y - \frac{25}{100}y = 12$

$\Rightarrow \frac{75y}{100} = 12$

$y = \frac{1200}{75}$

$y = 16,$ **B = 16**

$z - \frac{40}{100}z = 9$

$\frac{60z}{100} = 9$

$z = \frac{100\times9}{60} = 15,$ **C = 15**

A : B : C = 20 : 16 : 15

51 = 1530

1 = 30

इसलिए, B = 16 × 30 = 480

13;3 A की आय = $3x$ = 2400

B की आय = $7x$ = 5600

C की आय = $4x$ = 3200

A, B और C का खर्च क्रमश: = $4y, 3y \& 5y$

A की बचत = 300 है।

खर्च = $4y$ = (2400 - 300)

= 2100

$y = 2100/4 = 525$

B का खर्च = $3y = 1575$

B की बचत = 4025

C का खर्च = $5y = 2625$

C की बचत = 575

14;2 दूसरे वर्ष की आय = $3x$ = 45000

$x = 45000 \div 3 = 15000$

पहले वर्ष की आय = $2x$

= 2× 15000 = 30000

पहले वर्ष का खर्च = $5y$ = 25000

$y = 25000 \div 5 = 5000$

दूसरे वर्ष का खर्च = $9y$ = 45000

$y = 45000 \div 9 = 5000$

कुल बचत = (कुल आय - कुल खर्च)

= 45000 + 30000- (25000 + 45000)

= 75000 - 70000 = 5000

15;1

	A	B	C
कार्य के दिन =	30	50	40
प्रत्येक दिन वेतन =	4	3	2
कुल आय =	120	150	80
	12	15	8

12 इकाई = 144

1 इकाई = 12

B की आय = 12 ×15 = 180

16;3

	ट्रेन	बस	कार
तय दूरी	4	3	2
भाड़ा/किमी०	1	2	4
कुल भाड़ा =	4	6	8
	2	3	4

बस किराया = $\frac{3}{2+3+4} \times 720$

$= \frac{3}{9} \times 720 = 240$

ट्रेन किराया = $\frac{2}{2+3+4} \times 720$

$= \frac{2}{9} \times 720 = 160$

17.2;

	A	B
मुख्य	4	5
कमी के बाद	3	4
इकाई	1	1

1 इकाई = 25

A = 4 × 25 = 100

B = 5 × 25 = 125

18;4 अनुपात = 3 : 2 : 1 $3x, 2x, 1x$

प्रारम्भिक मूल्य = $(6x)^2 = 36x^2$

टुकड़ो में बाटने के बाद

$= 9x^2 + 4x^2 + x^2 = 14x^2$

हानि = $36x^2 - 14x^2$

$4620 = 22x^2$

$x^2 = 210$

प्रारम्भिक मूल्य = $36x^2 = 36 \times 210$

= 7560

19;1 $A \propto \frac{1}{B^3}$, $A = \frac{1}{B^3}$ (K= समानुपाती मान)

$B = \frac{K}{8} \therefore K = 24$

अब, $A = \frac{K}{9}$, $\frac{K}{9} = \frac{24}{B^3}$

$B^3 = \frac{9 \times 24}{8} = B^3 = 27$

$\therefore B = 3$

20;4 A : B = 3 : 4
B : C = 2 : 3

A : B = 3 : 4
B : C = 2 : 3

A	:	B	:	C
3	:	4 → ④		
② ← 2	:	3		
6		8	:	12

A : B : C = 6 : 8 : 12
3 : 4 : 6

यदि (3 + 4 + 6) = 7800
13 = 7800
∴ 1= 600
B और C के बीच अंतर = 2 = 2×600
= 1200

21;3 पहले, अनुपात को ₹ 1 के सिक्के में बदले

4 : 6 : 9
↓ ↓ ↓
$4x$ $6x$ $9x$
×5 ↓ ×2 ↓ ×1 ↓
$20x$ $12x$ $9x$

अब, कुल ₹ = 410
और $20x + 12x + 9x = 410$
$x = 100$
∴ ₹ 2 के सिक्कों का मान = 12 × 10
= 120

₹ 2 के सिक्कों की संख्या = $\frac{120}{2} = 60$

22;3

	₹ 1		50 पैसे		25पैसे
स्थानीय मान =	1	:	50	:	25
सिक्कों की संख्या =	1	:	2	:	3
	x	:	$2x$	:	$3x$

$x + 2x + 3x = 55$

$\frac{x}{1} + \frac{2x}{2} + \frac{3x}{4} = 55$

$\frac{4x+4x+3x}{4} = 55$

$\frac{11x}{4} = 55$

$x = 20$

50 पैसे क सिक्के = $2x$ = 40/-

22;3 अन्य विधि:-

$1 : \frac{2}{2} : \frac{3}{4}$

4 : 4 : 3
11 = 55
1 = 5
4 = 20
20 ×2 = 40

23.1; तांबा : जस्ता
4 : 3

तांबा = $\frac{4}{7} \times 63 = 36$ किलो०/ग्रा०

जस्ता = $\frac{3}{7} \times 63 = 27$ किलो०/ग्रा०

माना कि x किलो० तांबा खोदा गया।
शेष तांबा = $(63 - x)$ किलो०/ग्रा०

नया अनुपात = $\frac{10}{9}$

$\frac{Cu}{Zn} = \frac{10}{9}$

$\frac{36-x}{27} = \frac{10}{9}$

$\frac{36-x}{3} = \frac{10}{1}$

$36 - x = 30$

$x = 6$ किग्रा०

24;2 $\left(1-\frac{3}{5}\right) : \left(2-\frac{9}{10}\right)$

$\frac{2^{\times 10}}{5} : \frac{11^{\times 10}}{10} \Rightarrow 4 : 11$

अभ्यास

1. यदि A का $\frac{2}{3}$ = B का 75% = C का 0.6 हो तो A : B : C होगा।
(1) 2 : 3 : 3 (2) 3 : 4 : 5
(3) 4 : 5 : 6 (4) 9 : 8 : 10
(5) इनमें से कोई नहीं

2. यदि a : b = 5 : 7 और c : d = 2a : 3b है, तो ac : bd होगा
(1) 20 : 38 (2) 50 : 147
(3) 10 : 21 (4) 50 : 151
(5) इनमें से कोई नहीं

3. यदि $x : y = 3 : 2$ है, तो अनुपात $2x^2 + 3y^2 : 3x^2 - 2y^2$ बराबर होगा
(1) 12 : 5 (2) 6 : 5
(3) 30 : 19 (4) 5 : 3
(5) इनमें से कोई नहीं

4. ₹324.36 को 5 : 6 : 7 के अनुपात में विभाजित करें।
(1) ₹90.10, ₹108.12, ₹126.14
(2) ₹80.12, ₹118.14, ₹124.14
(3) ₹95.10, ₹128.12, ₹136.14
(4) ₹80.10, ₹118.12, ₹146.14
(5) इनमें से कोई नहीं

5. दो रकम 8 : 9 के समानुपाती है। यदि पहली रकम ₹20 है तो दूसरी रकम ज्ञात करें।
(1) ₹20.5 (2) ₹22.5
(3) ₹23.5 (4) ₹24.5
(5) इनमें से कोई नहीं

6. यदि A और B का अनुपात 3 : 4 और B और C का अनुपात 12 : 13 हो, तो A तथा C का अनुपात होगा?
(1) 3 : 13 (2) 9 : 13
(3) 36 : 13 (4) 13 : 9
(5) इनमें से कोई नहीं

7. A, B, C के वेतन का अनुपात क्रमशः 1 : 3 : 4 है। यदि उनके वेतन में क्रमशः 5%, 10% तथा 15% की वृद्धि की जाए, तो उनके बढ़े हुए वेतन किस अनुपात में होंगे?
(1) 20 : 66 : 95 (2) 21 : 66 : 95
(3) 21 : 66 : 92 (4) 19 : 66 : 92
(5) इनमें से कोई नहीं

8. एक लड़के के पास 50 पैसे, 25 पैसे तथा 10 पैसे मूल्य के कुछ सिक्के 1 : 2 : 3 के अनुपात में है। यदि सिक्कों की कुल राशि ₹6.50 है, तो 10 पैसे वाले सिक्कों की संख्या होगी
(1) 5 (2) 10
(3) 15 (4) 20
(5) इनमें से कोई नहीं

9. दो संख्याएँ 2 : 3 के अनुपात में हैं। यदि पहली संख्या में से 2 घटाया जाए तथा दूसरी संख्या में 2 जोड़ दिया जाए तो उनका अनुपात 1 : 2 हो जाता है। संख्याओं का योग होगा
(1) 30 (2) 28
(3) 24 (4) 10
(5) इनमें से कोई नहीं

10. ₹68000 को A, B और C में $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{5}{16}$ के अनुपात में बाँटा जाता है। सबसे बड़े और सबसे छोटे भाग का अंतर होगा
(1) ₹6000 (2) ₹14440
(3) ₹9200 (4) ₹16000
(5) इनमें से कोई नहीं

11. तीन संख्याएँ $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$ के अनुपात में हैं। सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्याओं का अंतर 36 है। वे संख्याएँ हैं।
(1) 72, 84, 108 (2) 60, 72, 96
(3) 72, 84, 96 (4) 72, 96, 108
(5) इनमें से कोई नहीं

12. दो व्यक्तियों की आय का अनुपात 5 : 3 है तथा उनके व्यय का अनुपात 9 : 5 है। यदि वे क्रमशः ₹2600 और ₹ 1800 की बचत करते हैं, तो उनकी आय है

(1) ₹ 8000; ₹ 4800 (2) ₹ 6000; ₹ 3600
(3) ₹ 10000; ₹ 6000 (4) ₹ 9000; ₹ 5400
(5) इनमें से कोई नहीं

13. तीन कक्षाओं में विद्यार्थियों की संख्याओं का अनुपात क्रमशः 2 : 3 : 5 है। प्रत्येक कक्षा में 20 विद्यार्थी बढ़ा दिए जाने पर यह अनुपात 4 : 5 : 7 हो जाता है। प्रारम्भ में कुल विद्यार्थियों की संख्या थी

(1) 50 (2) 90
(3) 100 (4) 150
(5) इनमें से कोई नहीं

14. एक संख्या का 75%, दूसरी संख्या के 3/7 के समान है। पहली और दूसरी संख्या के बीच का क्रमशः अनुपात क्या है?

(1) 4 : 7 (2) 7 : 4
(3) 12 : 7 (4) 7 : 12
(5) इनमें से कोई नहीं

15. एक कक्षा में लड़कों और लड़कियों के बीच का क्रमशः अनुपात 6 : 5 है। 8 अधिक लड़के कक्षा में भर्ती हों और दो लड़कियां कक्षा छोड़ दें तो क्रमशः अनुपात 11 : 7 हो जाता है। अब कक्षा में कितने लड़के हैं?

(1) 28 (2) 38
(3) 44 (4) 36
(5) इनमें से कोई नहीं

16. एक संख्या का 4/7, दूसरी संख्या के 40% के बराबर है। पहली और दूसरी संख्या के बीच का क्रमशः अनुपात क्या है?

(1) 5 : 4 (2) 4 : 5
(3) 10 : 7 (4) 7 : 10
(5) इनमें से कोई नहीं

17. एक संस्था के मौजूदा पुरुष और महिला कर्मचारियों के बीच 7 : 3 का अनुपात है। नए भर्ती हुए 240 कर्मचारियों में पुरुष और महिला के बीच 5 : 7 का अनुपात है। नए भर्ती हुए कर्मचारियों के संस्था में शामिल हो जाने के बाद पुरुष और महिला कर्मचारियों के बीच क्या अनुपात होगा?

(1) 6 : 5 (2) 5 : 4
(3) 3 : 2
(4) निर्धारित नहीं किया जा सकता है।
(5) इनमें से कोई नहीं

18. एक संख्या का 40% अन्य संख्या के 3/5 के बराबर है। पहली संख्या और दूसरी संख्या के बीच क्या अनुपात है?

(1) 3 : 2 (2) 2 : 3
(3) 3 : 4
(4) निर्धारित नहीं किया जा सकता है।
(5) इनमें से कोई नहीं

19. तीन दोस्त, 45,000 ₹ की राशि को इस प्रकार बाँटते हैं कि उनमें से एक कुल राशि का 1/4 हिस्सा लेता है और बाकी दो शेष राशि को आपस में बराबर-बराबर बाँट लेते हैं। दो दोस्तों द्वारा मिलकर ली गई कुल राशि से एक दोस्त द्वारा ली गई राशि का अनुपात क्या है?

(1) 1 : 3 (2) 1 : 2
(3) 3 : 2 (4) 2 : 3
(5) इनमें से कोई नहीं

20. एक बगीचे में नारियल और आम के पेड़ों का अनुपात क्रमशः 5 : 6 है। यदि कुल पेड़ों की संख्या 121 है, तो बगीचे में नारियल की पेड़ों की संख्या कितनी है?

(1) 50 (2) 45
(3) 56 (4) 55
(5) इनमें से कोई नहीं

21. X और Y नामक दो संस्थानों में दाखिल छात्रों की संख्या क्रमशः 5 : 8 अनुपात है। यदि संस्थान 'X' में छात्रों की संख्या में 20% की वृद्धि हो जाए, और संस्थान 'Y' में 10% वृद्धि हो जाए, तो क्रमशः नया अनुपात क्या होगा?

(1) 15 : 22 (2) 15 : 16
(3) 5 : 4 (4) 5 : 7
(5) इनमें से कोई नहीं

22. किसी परीक्षा में पास होने वालों की संख्या और फेल होने वालों की संख्या का अनुपात 25 : 4 था। यदि पाँच और परीक्षा में सम्मिलित होते है तथा फेल होने वालों की संख्या पहले से 2 कम होती, तो पास होने वाले तथा फेल होने वाले का अनुपात 22 : 3 होता। परीक्षा में बैठने वालों की संख्या है

(1) 145 (2) 150
(3) 155 (4) 180
(5) इनमें से कोई नहीं

23. A तथा B की आय 5 : 3 के अनुपात में है। A, B तथा C के व्यय का अनुपात 8 : 5 : 2 में है। यदि C का व्यय ₹2000 तथा B की बचत ₹700 हो, तो A की बचत होगी?

(1) ₹1500　(2) ₹1000

(3) ₹500　(4) ₹250

(5) इनमें से कोई नहीं

24. A का B से अनुपात 4 : 5 है तथा B का C से अनुपात 2 : 3 है। यदि A, 800 के बराबर है, तो C कितने के बराबर होगा?

(1) 1000　(2) 1200

(3) 1500　(4) 2000

(5) इनमें से कोई नहीं

25. तीन कक्षाओं में विद्यार्थियों की संख्याओं का अनुपात 2 : 3 : 5 है। यदि प्रत्येक कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या में 20 की वृद्धि हो जाए, तो अनुपात 4 : 5 : 7 हो जाता है। वृद्धि से पहले कक्षाओं के विद्यार्थियों की कुल संख्या थी

(1) 80　(2) 90

(3) 100　(4) 120

(5) इनमें से कोई नहीं

26. एक व्यक्ति 12 लिटर दूध में 3 लिटर पानी मिलाता है और दूसरा व्यक्ति 10 लिटर दूध में 4 लिटर पानी मिलाता है। दोनों प्रकार के मिश्रणों में दूध की सांद्रता का क्या अनुपात है?

(1) 28 : 25　(2) 27 : 25

(3) 26 : 25　(3) 25 : 26

(5) इनमें से कोई नहीं

27. ₹425 को 4 पुरुषों, 5 महिलाओं एवं 6 बच्चों के बीच इस प्रकार बाँटा जाता है कि एक पुरुष, एक महिला एवं एक बच्चा के हिस्सों का अनुपात 9 : 8 : 4 के अनुपात में हो, तो एक महिला का हिस्सा बताएँ।

(1) ₹24　(2) ₹28

(3) ₹32　(4) ₹34

(5) इनमें से कोई नहीं

28. एक ही तरह का काम व्यक्तियों के तीन दलों को सौंपा जाता है। दलों में व्यक्तियों की संख्या का अनुपात 3 : 4 : 5 है। उनके द्वारा कार्य पूरा करने में लगे दिनों की संख्या का अनुपात बताएँ।

(1) 20 : 15 : 12　(2) 15 : 12 : 18

(3) 20 : 12 : 15　(3) 15 : 25 : 20

(5) इनमें से कोई नहीं

29. दो पीपों में पानी और दूध का मिश्रण है। दोनों पीपों में पानी और दूध का अनुपात क्रमशः 1 : 2 एवं 2 : 5 है। दोनों पीपों के मिश्रण को 1 : 4 के अनुपात में मिलाया जाता है। नए मिश्रण में पानी एवं दूध का अनुपात ज्ञात करें।

(1) 35 : 75　(2) 31 : 74

(3) 41 : 65　(4) 31 : 65

(5) इनमें से कोई नहीं

30. एक वर्ष पूर्व, लक्ष्मण एवं गोपाल के आमदनी का अनुपात 3 : 5 था। दोनों के पिछले वर्ष एवं वर्तमान वर्ष के व्यक्तिगत आमदनी का अनुपात क्रमशः 2 : 3 एवं 4 : 5 है। यदि वर्तमान वर्ष में दोनों की कुल आमदनी ₹4300 हों तो लक्ष्मण की वर्तमान आमदनी क्या है?

(1) ₹1200　(2) ₹1600

(3) ₹1800

(4) निर्धारित नहीं किया जा सकता

(5) इनमें से कोई नहीं

31. एक बाल्टी में दो द्रव्य A एवं B के मिश्रण का अनुपात 7 : 5 है। यदि 9 लीटर मिश्रण 9 लिटर द्रव B विस्थापित किया जाए तो दोनों द्रव्यों का अनुपात 7 : 9 हो जाता है। बाल्टी में द्रव्य A की मात्रा कितनी है?

(1) 21 लीटर　(2) 23 लीटर

(3) 25 लीटर　(4) 27 लीटर

(5) इनमें से कोई नहीं

32. एक बर्तन में दो द्रव्य A एवं B का अनुपात 5 : 3 में हैं। यदि मिश्रण का 16 लिटर निकालकर उसकी जगह पर उतनी ही मात्रा में द्रव्य B मिला दिया जाता है तो अनुपात 3 : 5 हो जाता है। बर्तन में द्रव्य की कुल कितनी मात्रा रखी जा सकती है?

(1) 30 लीटर　(2) 40 लीटर

(3) 35 लीटर　(4) 45 लीटर

(5) इनमें से कोई नहीं

33. एक निश्चित रकम A, B तथा C के बीच 3 : 3 : 5 अनुपात में बाँटा जाता है। अगर A, B तथा C का कुल हिस्सा ₹ 22,000 है, तो A और C का कुल हिस्सा कितना होगा?

(1) ₹ 16,500 (2) ₹ 15,000
(3) ₹ 12,500 (4) ₹ 16,000
(5) इनमें से कोई नहीं

34. दो बर्तनों A तथा B के मिश्रणों में दूध और पानी क्रमशः 4 : 5 तथा 5 : 1 के अनुपात में है। A तथा B के मिश्रणों की मात्राएं किस अनुपात में ली जाएं ताकि एक ऐसा मिश्रण बने जिसमें दूध तथा पानी 5 : 4 के अनुपात में हों?

(1) 2 : 5 (2) 4 : 3
(3) 5 : 3 (4) 2 : 3
(5) इनमें से कोई नहीं

35. एक थैले में ₹ 1, 50 पैसे तथा 25 पैसे के सिक्के 5 : 6 : 8 के अनुपात में भरे हैं। यदि थैले में इन सिक्कों की कुल धनराशि ₹210 हो, तो थैले में प्रत्येक प्रकार के सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(1) 105, 126, 168 (2) 104, 136, 176
(3) 106, 116, 156 (4) 108, 126, 146
(5) इनमें से कोई नहीं

36. ₹32 में ₹ 1, 50 पैसे एवं 25 पैसे के कितने सिक्के होंगे जबकि ये 4 : 5 : 6 के अनुपात में हो?

(1) 16,20, 24 (2) 22, 24, 28
(3) 14, 24, 22 (4) 18, 20, 22
(5) इनमें से कोई नहीं

37. ₹3115 को A, B एवं C के बीच इस प्रकार बाँटा किया जाता है कि यदि इनके हिस्से में क्रमशः ₹25, ₹28 एवं ₹52 घटा दिए जाएँ तो शेष रकम 8 : 15 : 20 के अनुपात हो जायेगी। प्रत्येक व्यक्ति का हिस्सा ज्ञात करें।

(1) ₹585, ₹1078, ₹1452
(2) ₹685, ₹1178, 1252
(3) ₹485, ₹1088, ₹1352
(4) ₹785, ₹1378, ₹1652
(5) इनमें से कोई नहीं

38. दो संख्याएँ 3 : 4 के अनुपात में है। उनमें कितना जोड़ा जाए कि अनुपात बदलकर 4 : 5 हो जाए?

(1) 0.5 (2) 1
(3) 1.5 (4) 2
(5) इनमें से कोई नहीं

39. अनुपात 19 : 23 के प्रत्येक पद में से कितना घटाया जाए कि अनुपात बदलकर 3 : 4 हो जाए?

(1) 5 (2) 6
(3) 7 (4) 8
(5) इनमें से कोई नहीं

40. एक मालिक अपने कर्मचारियों की छँटनी 9 : 8 के अनुपात में करता है तथा उनका वेतन 14 : 15 के अनुपात में बढ़ा देता है। कर्मचारियों को भुगतान किए जाने वाली कुल रकम कस अनुपात में बढ़ी या घटी?

(1) 11 : 15 (2) 20 : 21
(3) 21 : 20
(4) तय नहीं किया जा सकता
(5) इनमें से कोई नहीं

41. A और B की आय का अनुपात क्रमशः 8 : 9 है। यदि A की आय 50% बढ़ जाए और B की आय 25% घट जाए। उनकी आय का नया अनुपात क्रमशः 16 : 9 हो जाता है। A की आय कितनी है?

(1) ₹37,000 (2) ₹28,500
(3) ₹22,000
(4) निर्धारित नहीं किया जा सकता
(5) इनमें से कोई नहीं

42. एक मिश्रण में दूध और पानी क्रमशः 4 : 3 के अनुपात में है। इस मिश्रण में 6 लिटर पानी डालने से दूध और पानी का अनुपात क्रमशः 8 : 7 हो जाता है। मूल मिश्रण में दूध की मात्रा कितनी है?

(1) 96 लीटर (2) 36 लीटर
(3) 84 लीटर (4) 48 लीटर
(5) इनमें से कोई नहीं

43. ₹ 1300 को A, B, C और D में इस प्रकार बाँटा जाता है कि

$$\frac{\text{A का हिस्सा}}{\text{B का हिस्सा}} = \frac{\text{B का हिस्सा}}{\text{C का हिस्सा}} = \frac{\text{C का हिस्सा}}{\text{D का हिस्सा}} = \frac{2}{3}$$ है। A का हिस्सा ज्ञात करें।

(1) ₹ 150 (2) ₹ 160
(3) ₹ 170
(4) निर्धारित नहीं किया जा सकता
(5) इनमें से कोई नहीं

44. एक कुत्ता, खरगोश का पीछा करता है। कुत्ता खरगोश की हर 7 छलांगों पर 6 छलांग लगाता है। लेकिन खरगोश कुत्ते की हर 5 छलांग पर 6 छलांग लगाता है। कुत्ते एवं खरगोश की छलांग दर की तुलना करें।

(1) 36 : 35 (2) 35 : 36
(3) 36 : 40
(4) निर्धारित नहीं किया जा सकता
(5) इनमें से कोई नहीं

45. अनुपात 6 : 7 के प्रत्येक पद में से वह कौन-सी छोटी से छोटी संख्या घटाई जाये कि नये पदों का अनुपात आरंभिक अनुपात से 16 : 21 कम हो?

(1) 3 (2) 4
(3) 5 (4) 6
(5) इनमें से कोई नहीं

46. दो घनात्मक संख्याओं का अनुपात 11 : 12 है। उनका गुणनफल 4752 है। उनमें से छोटी संख्या कौन-सी है?

(1) 60 (2) 66
(3) 55 (4) 65
(5) इनमें से कोई नहीं

विस्तारपूर्वक उत्तर:-

1.4; प्रश्नानुसार:-

$$A \times \frac{2}{3} = B \times \frac{75}{100} = C \times \frac{6}{10}$$

$$\Rightarrow A \times \frac{2}{3} = B \times \frac{3}{4} = C \times \frac{3}{5}$$

अनुपात A : B = 9 : 8
B : C = 4 : 5
A : B : C = 36 : 32 : 40
A : B : C = 9 : 8 : 10

2.4; दिया है कि, $a : b = \frac{5}{7}$ ______(i)

और $c : d = 2a : 3b = 2\frac{a}{b} : 3$

$= 2 \times \frac{5}{7} : 3$[चूंकि $\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$, (i) में दिया है]

$= 10 : 21$

ac : bd $\Rightarrow 5 \times 10 : 7 : 21$

(चूंकि $\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$ और $\frac{c}{d} = \frac{10}{21}$)

$\Rightarrow 50 : 147$

2.4; अथवा

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{2a}{3b}$$

$$\frac{ac}{bd} = \frac{5 \times 2a}{7 \times 3b}$$

$$\frac{ac}{bd} = \frac{10}{21} \times \left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\frac{ac}{bd} = \frac{10}{21} \times \left(\frac{5}{7}\right)$$

$$\frac{ac}{bd} = \frac{50}{147}$$

3. 3; $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$

$$\frac{2x^2 + 3y^2}{3x^2 - 2y^2}$$

$$\frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{y}\right)^2}{3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{y}\right)^2} = \frac{2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3}{3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$$

$$= \frac{2 \times \frac{9}{4} + 3}{3 \times \frac{9}{4} - 2} = \frac{\frac{18}{4} + 3}{\frac{27}{4} - 2} = \frac{\frac{18 + 12}{4}}{\frac{27 - 8}{4}}$$

$$= \frac{30}{4} \times \frac{4}{19} = 30 : 19$$

4. 1;

पहला	दूसरा	तीसरा
$\frac{5}{18} \times 324.36$	$\frac{6}{18} \times 324.36$	$\frac{7}{18} \times 324.36$
5×18.02	6×18.02	7×18.02
90.10	108.12	126.14

5. 2; 8 : 9
↓
20

यदि 8 = 20 है

तो $9 = \frac{20}{8} \times 9 = 22.5$ होगा

अथवा

यदि $8x = 20$ है।

तो $9x = \frac{20 \times 9x}{8x} =$ ₹22.5

6. 2; A : B = 3 : 4
B : C = 12 : 13

$$A : C = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{3}{4} \times \frac{12}{13} = 9 : 13$$

6.2; लघु विधि:-

A : B : C
3 : 4 → (4) | इस विधि के लिए
(12) ← 12 : 13 | अनुपात और
36 48 : 52 | समानुपात देखें
A : C = 36 : 52
9 : 13

7.3; माना की A, B और C की प्रारम्भिक वेतन क्रमशः ₹ x, ₹ $3x$ और ₹ $4x$ है।
अनुपात बढ़ाने के बाद

$$= \frac{x\times105}{100} : \frac{3x\times110}{100} : \frac{4x\times115}{100}$$
$= 105 : 330 : 460 = 21 : 66 : 92$

अथवा

	A	B	C
प्रारम्भिक	100 :	300 :	400
बढ़ोत्तरी के बाद	105 :	330 :	460
	= 21 :	66 :	92

अथवा

A : B : C
1 : 3 : 4
×100 ↓ ↓ ↓
100 : 300 : 400
5% बढोत्तरी के बाद 100 हो जाता है 105/-
10% बढोत्तरी के बाद 300 हो जाता है 330/-
15%बढोत्तरी के बाद 400 हो जाता है 460/-
नया अनुपात है:-
105 : 330 : 460
21 : 66 : 92

8.3; 50 पैसे = ₹ $\frac{1}{2}$

25 पैसे = ₹ $\frac{1}{4}$

10 पैसे = ₹ $\frac{1}{10}$

और सिक्कों के संख्याओं का अनुपात = 1: 2 : 3

सिक्कों के मान का अनुपात = $\frac{1}{2}:\frac{2}{4}:\frac{3}{10}$
= 5 : 5 : 3

☐ 10 पैसे के सिक्कों का मान

$= ₹\left(\frac{3}{13}\times6.50\right) = ₹\ 1.5$

☐ 10 पैसे के सिक्कों की संख्या = 1.5 × 10
= 15

9.1; माना की संख्या $2x$ और $3x$ है।

$$\frac{2x-2}{3x+2} = \frac{1}{2}$$
$\Rightarrow 4x - 4 = 3x+2$
$\Rightarrow x = 6$
इसलिए, सिक्कों की संख्या = $2x + 3x = 5x$
$= 5\times6 = 30$

10.4; $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{5}{16}$

$\frac{8 : 4 : 5}{16}$ → 2, 4 और 16 का ल०स०
इसलिए अनुपात 8 : 4 : 5 है।
बड़े और छोटे के बीच का अंतर, $8x - 4x = 4x$
अब, $8x + 4x + 5x = 68000$
$17x = 68000$

$$\therefore\ 4x = \frac{68000\times4x}{17x} = 16000$$

11.4; $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$

$\frac{6 : 8 : 9}{12}$ → 2,3 और 4 का ल०स०
अनुपात = 6 : 8 : 9
बड़ी और छोटी संख्या के बीच अंतर
संख्या $9x - 6x = 3x$ है।

$$x = \frac{36}{3} = 12$$
पहली संख्या = $6x = 72$
दूसरी संख्या = $8x = 96$
तीसरी संख्या = $9x = 108$

12.1; माना की आय $5x$ और $3x$ है और खर्च क्रमशः $9y$ और $5y$ है।

प्रश्नानुसार,

$5x - 9y = 2600$ ______ (1)

$3x - 5y = 1800$ ______ (2)

$3\{5X - 9Y = 2600\}$

$5\{3X - 5Y = 1800\}$

$15X - 27Y = 7800$

$-15X + 25Y = -9000$ घटाने पर

$-2Y = -1200$

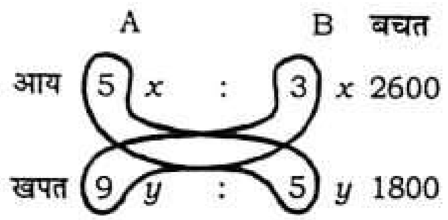
$Y = 600$

Y का मान समीकरण (i) में रखने पर

$X = 1600$

$\therefore$ आय = ₹8000 और ₹4800 है।

लघु विधिः-



$$x = \frac{\text{बचत का अंतर}}{(9\times3-5\times5)}\times(9-5)$$

$$= \frac{(2600-1800)}{2}\times4 = 1600$$

इसलिए, आय ₹8000 और ₹4800 है।

13.3; प्रारम्भिक अनुपात 2 : 3 : 5

बढोत्तरी के बाद 4 : 5 : 7

अनुपात का अंतर 2 : 2 : 2

दूसरा भाग = 20

पहला भाग = 10

छात्रों का योग = 10(2 + 3 + 5)

= 100

13.3; लघु विधिः-

2 : 3 : 5 हो जाता 4 : 5 : 7 है (प्रत्येक कक्षा में 20 छात्रों की की बढोत्तरी के बाद 60 छात्र)

$2x + 3x + 5x + 60 = 4x + 5x + 7x$

$6x = 60$

$x = 10$

कक्षा में $10x$ छात्र $= 10 \times 10$

= 100 छात्र थे।

14.1; माना की संख्या x और y है।

अब, प्रश्नानुसार,

$$\frac{75}{100}\times x = \frac{3}{7}\times y$$

अथवा, $\frac{x}{y} = \frac{3}{7}\times\frac{100}{75} = \frac{4}{7} = 4:7$

15.3; माना की लड़के और लड़कियों की संख्या $6x$ और $5x$ है।

अब, प्रश्नानुसार

$$\frac{6x+8}{5x-2} = \frac{11}{7}$$

$\Rightarrow 42x + 56 = 55x - 22$

$\Rightarrow 55x - 42x = 56 + 22$

$\Rightarrow 13x = 78$

$\Rightarrow x = \frac{78}{13} = 6$

□ वर्ग में लड़कों की संख्या = $(6x + 8)$

$= 6 \times 6 + 8$

$= 44$

16.4; माना की संख्या x और y है।

अब, प्रश्नानुसार,

$$\frac{4}{7}x = \frac{40}{100}y$$

या, $\frac{x}{y} = \frac{40}{100}\times\frac{7}{4} = \frac{7}{10}$

या, $x : y = 7 : 10$

17.4; माना की संस्था में पुरुष और महिला कर्मचारी की संख्या क्रमशः $7x$ और $3x$ है।
नए कर्मचारियों की संख्या = 240
नए कर्मचारियों में पुरुषों और महिलाओं का अनुपात = 5 : 7

नए कर्मचारियों में पुरुषों की संख्या = $\frac{5}{12} \times 240$
= 100
नए कर्मचारियो में महिलाओं की संख्या = 240 − 100
= 140
संस्था, में नए कर्मचारियो में पुरुषों और महिलाओं की संख्याओं का अनुपात = $\frac{7x+100}{3x+140}$
इसलिए, विकल्प (4) ही सही है।

18.1; माना की संख्या x और y है।
प्रश्नानुसार,

$$\frac{40}{100} \times x = \frac{3}{5} \times y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5} \div \frac{40}{100}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{100}{40} = \frac{3}{2}$$

पहली और दूसरी संख्या का अनुपात = 3 : 2

19.1; दो साथियों का हिस्सा = $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

अपेक्षित अनुपात = $\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = 1 : 3$

20.4; पेड़ो की कुल संख्या = 121
नारियल तथा आम के पेड़ों के संख्या का अनुपात = 5 : 6
∴ कुल नारियल के पेड़ों की संख्या

$$= \frac{5}{11} \times 121 = 5 \times 11 = 55$$

20.4; $\frac{C}{M} = \frac{5}{6}$
$11x = 121$
$x = 11$
$C = 5x = 5 \times 11$
$= 55$

21.1; माना की X में छात्रों की संख्या $5x$ है और Y में $8x$ है।
X में छात्रों की संख्या बढ़ाने पर

$$= \frac{120}{100} \times 5x = 6x$$

Y में छात्रों की संख्या बढ़ाने पर

$$= \frac{110 \times 8x}{100} = 8.8x$$

∴ अपेक्षित अनुपात = $6x : 8.8x$
= 60 : 88 = 15 : 22

21.1; पैरामाउंट विधि:-

	x	y
माना की प्रारम्भ में छात्रों की संख्या →	500	800
बढोत्तरी के बाद छात्रों की संख्या →	600	880
अनुपात →	15 :	22

22.1; माना की पास और फेल छात्रों की संख्या क्रमशः $25x$ और $4x$ है।
प्रश्नानुसार:-
यदि 5 और सम्मिलित होते हैं।
$25x + 4x + 5$
$= 29x + 5$, फेल छात्रों की संख्या 2 कम है।

$4x - 2$, तो $\frac{\text{पास}}{\text{फेल}} = \frac{22}{3}$
पास छात्र = सम्मिलित छात्र - फेल छात्र

$$\frac{(29x+5)-(4x-2)}{4x-2} = \frac{22}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{29x-4x+5+2}{4x-2} = \frac{22}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{25x+7}{4x-2} = \frac{22}{3}$$

$\Rightarrow 75x + 21 = 88x - 44$
$\Rightarrow 21+44 = 88x - 75x$
$\Rightarrow 13x = 65$
$x = 5$
सम्मिलित छात्रों की संख्या = $29x$
$= 29 \times 5$
$= 145$

22.1; लघु विधि:-

$$\frac{\text{पास}}{\text{फेल}} = \frac{25x}{4x}$$

कुल = $29x$

$y = 5$ छात्र और सम्मलित होते है, तो छात्रों की संख्या = $29x + 5$

अब, सम्मलित = $\frac{25x + 3x}{3x}$

$$\frac{29x + 5}{4x - 2} = \frac{25x}{3x}$$

$87x + 15 = 100x - 50$

$65 = 13x$

$x = 5$

$29 \times 5 = 145$

23.1; A और B का अनुपात = 5 : 3 है।

A, B और C के खर्च का अनुपात = 8 : 5 : 2

C का खर्च = ₹2000

∴ B का खर्च = $\frac{5}{2}$ × C का खर्च

$= \frac{5}{2} \times$ ₹2000 = ₹5000

B की बचत = ₹700

B की आय = खर्च + बचत

= ₹5000 + ₹700

= ₹5700

A की आय = B की आय $\frac{5}{3}$

$= \frac{5}{3} \times$ ₹5700 = ₹9500

A का खर्च = C के खर्च का $\frac{8}{2}$

$= \frac{8}{2} \times$ ₹2000 = ₹8000

∴ A की बचत = ₹9500 – ₹8000

= ₹1500

24.3; C (खर्च) = $2y = 200$

$y = 100$

B (खर्च) = $5y = 5000$

A (खर्च) = $8y = 8 \times 1000 = 8000$

B की बचत = $3x$ – खपत = 700

(बढ़त)

$3x - 5000 = 700$

$3x = 5700$

$x = 1900$

A की आय = $3x = 1900 \times 5$

= 9500/-

A की बचत = आय – खर्च = 9500 – 8000

= 1500/-

पैरामाउंट विधि:-

24. 3; A : B = 4 : 5 × 2

B : C = 2 : 3 × 5

A : B : C = 8 : 10 : 15

A = 800

⇒ $8x = 800$

$$x = \frac{800}{8} = 100$$

C = $15x$

= 1500

25.3; माना की तीन वर्गो में छात्रों की संख्या क्रमशः $2x$, $3x$ और $5x$ है।

∴ प्रारम्भ में छात्रों की संख्या

$= 2x + 3x + 5x = 10x$

अब प्रत्येक वर्ग 20 छात्र बढ़ जाते है।

तो, $\frac{2x + 20}{3x + 20} = \frac{4}{5}$

⇒ $12x + 80 = 10x + 100$

⇒ $2x = 20$ ⇒ $x = \frac{20}{2} = 10$

∴ अपेक्षित छात्रों की संख्या

$= 10x = 10 \times 10 = 100$

26.1; दूध की मात्रा पहले मिश्रण में = $\frac{12}{12 + 3} = \frac{12}{15}$

दूध की मात्रा दूसरे मिश्रण में = $\frac{10}{10 + 4} = \frac{10}{14}$

∴ उनके मात्रा का अनुपात = $\frac{12}{15} : \frac{10}{14}$

$= 12 \times 14 : 15 \times 10$

$= 28 : 25$

Scanned by CamScanner

27. 4; पुरुष, महिला और बच्चे के समूह के हिस्से का अनुपात :-

$= 9 \times 4 : 8 \times 5 : 4 \times 6$

$= 36 : 40 : 24$

5 महिलाओं का हिस्सा

$= \frac{40}{36+40+24} \times 425 =$ ₹ 170

$\therefore$ 1 महिला का हिस्सा $= \frac{170}{5} =$ ₹ 34

28.1; हम देख सकते हैं, कि पुरुष और दिन आपस में व्युत्क्रमनुपाति है।

इसलिए, अपेक्षित दिनों का अनुपात $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$

$= \frac{20}{60} : \frac{15}{60} : \frac{12}{60} = 20 : 15 : 12$

29.2; अनुपात को पुर्णांक में बदले

	पानी :	दूध
बर्तन I	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
बर्तन II	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$

बर्तन I से $\frac{1}{5}$ भाग निकालते है और बर्तन II में $\frac{4}{5}$ भाग निकालते हैं।

इसलिए, नए बर्तन में पानी और दूध का अनुपात:-

$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{7} \times \frac{4}{5}\right) : \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{5}{7} \times \frac{4}{5}\right)$ है।

$= \left(\frac{1}{15} + \frac{8}{35}\right) : \left(\frac{2}{15} + \frac{20}{35}\right)$

$= \frac{31}{105} : \frac{74}{105} = 31 : 74$

30.3; प्रत्येक की आय

पीछले वर्ष : वर्त्तमान वर्ष

लक्ष्मण

2 : 3

एक वर्ष पहले वर्त्तमान वर्ष

$\frac{1}{2} \times 100 = 50\%$ बढत

गोपाल

4 : 5

एक वर्ष पहले वर्त्तमान वर्ष

$\frac{1}{4} \times 100 = 25\%$ बढत

एक वर्ष पहले → लक्ष्मण : गोपाल

3 : 5

↓ 50% : ↓ 25%

3 +1.5 : 5+1.25

वर्त्तमान आय 18:25 → $\frac{4300}{43} = 100$

30.3; पैरामाउंट विधि:-

	लक्ष्मण		गोपाल
अंतिम वर्ष का अनुपात	3	:	5
प्रत्येक का अनुपात	2 : 3 (अंतिम वर्त्तमान)		4 : 5 (अंतिम वर्त्तमान)

वर्त्तमान $3 \times \frac{3}{2} : 5 \times \frac{5}{4}$

$\Rightarrow 18 : 25$

$\therefore$ लक्ष्मण की वर्तमान आय

$= \frac{4300}{18+25} \times 18 = 1800$

31.1; माना की एक बर्तन में द्रव्य A और B क्रमश: $7x$ लीटर और $5x$ लीटर है।

9 लीटर, मिश्रण निकालने के पश्चात् द्रव्य की मात्रा

A बर्तन में $= 7x - 9 \times \frac{7}{12} = 7x - \frac{63}{5}$

Scanned by CamScanner

9 लीटर मिश्रण को तरल B द्वारा विस्थापित करने के बाद

$= 12x - \left(7x - \frac{63}{12}\right) = 5x + \frac{63}{12}$

प्रश्नानुसार,

$\frac{7x - \frac{63}{12}}{5x + \frac{63}{12}} = \frac{7}{9}$

$\Rightarrow \frac{12 \times 7x - 63}{12 \times 5x + 63} = \frac{7}{9}$

$\Rightarrow (84x - 63) \times 9 = (60x + 63) \times 7$

$\Rightarrow 84x \times 9 - 60x \times 7 = 63 \times 7 + 63 \times 9$

$\Rightarrow 336x = 63 \times 16$

$x = \frac{63 \times 16}{336} = 3$

$\therefore$ बर्तन में द्रव्य A = 7 × 3 = 21

31.1; पैरामाउंट विधिः-

A : B
7 : 5
7 : 9

4 इकाई = 9 लीटर

1 इकाई = $\frac{9}{4}$ लीटर

प्रारम्भिक मिश्रण $= 12 \times \frac{9}{4} + 9$

$= 3 \times 9 + 9 = 27$

$= 27 + 9 = 36$

द्रव्य A $= \frac{7}{12} \times 36$ ली०

= 7 × 3 = लीटर

32.2; माना की बर्तन में द्रव्य A और B क्रमशः 5x लीटर और 3x लीटर है।

निष्कासित मात्रा $= \frac{5}{5+3} \times 16$

= A का लीटर 10 लीटर

B का 16 – 10 = 6

अब, $(5x - 10) : (3x - 6 + 16)$

$= 3 : 5$

अथवा, $\frac{5x - 10}{3x + 10} = \frac{3}{5}$ अथवा, $25x - 50 = 9x + 30$

अथवा, $16x = 80$

$\therefore x = 5$

$\therefore$ बर्तन की क्षमता $7x = 8 \times 5$

= 40 लीटर

32.2; पैरामाउंट विधिः-

A	:	B
15	:	9
15	:	25

16 इकाई = 16 लीटर

1 इकाई = 1 लीटर

निष्कासित इकाई के बाद = 24 × 1

= 24 लीटर

निष्कासित इकाई के पहले = 24 + 16

= 40 लीटर

33. 4; माना की A, B और C का हिस्सा क्रमशः 3x, 3x और 5x है।

प्रश्नानुसारः-

$3x + 3x + 5x = 22000$

$11x = 22000$

$\therefore x = 2000$

$\therefore$ A और C का हिस्सा $= 3x + 5x$

$= 8x$

$= 8 \times 2000$

= ₹ 16000

34. 3; माना की बर्तन A और B की मात्रा का अनुपात $x : y$ है और वे एक मिश्रण बनाते हैं। जिसमें दूध और पानी का अनुपात 5 : 4 है।

बर्तन A के x लीटर में दूध की मात्रा $\frac{4}{9}x$ और

पानी की मात्रा $= \frac{5}{9}x$ है।

बर्तन B के y लीटर में दूध की मात्रा $= \frac{5}{6}y$ और

पानी की मात्रा $= \frac{1}{6}y$.

प्रश्नानुसार–

Scanned by CamScanner

$$\frac{\frac{4}{9}x+\frac{5}{6}y}{\frac{5}{9}x+\frac{1}{6}y}=\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{8x+15y}{10x+3y}=\frac{5}{4}$$

$\Rightarrow (8x+15y)\times 4=(10x+3y)\times 5$
$\Rightarrow 32x+60y=50x+15y$
$\Rightarrow (60-15)y=(50-32)x$
$\Rightarrow 45y=18x$
$\Rightarrow 5y=2x$
$\Rightarrow x:y=5:2$

34. 3; पैरामाउंट विधि:-

बर्तन A में दूध की मात्रा $\frac{4}{9}$ बर्तन B में दूध की मात्रा $\frac{5}{6}$

$\frac{5}{9}$

$\frac{5}{18}$ $\frac{1}{9}$

5 : 2

35. 1; माना की ₹ 1, 50 पैसे और 25 पैसे के सिक्के की संख्या क्रमश: $5x$, $6x$ और $8x$ है।

प्रश्नानुसार-

$\because 5x\times 1+6x\times\frac{1}{2}+8x\times\frac{1}{4}=210$

$\Rightarrow x(5+3+2)=210$

$\therefore x=21$

$\therefore$ ₹ 1 के सिक्के की संख्या $=5\times 21$
$=105$

50 पैसे के सिक्के की संख्या $=6\times 21$
$=126$

25 पैसे के सिक्के की संख्या $=8\times 21$
$=168$

36. 1; माना की सिक्को का अनुपात

$4x:5x:6x$

हम जानते है। कि

1 सिक्का ₹ 1 का है।

2 सिक्के 50 पैसे है।

4 सिक्का 25 पैसे है।

$$\therefore \frac{4x}{1}+\frac{5x}{2}+\frac{6x}{4}=32/-$$

$$\frac{16x+10x+6x}{4}=32$$

$$\frac{32x}{4}=32$$

$x=4$
$4x=4\times 4=16$
$5x=5\times 4=20$
$6x=6\times 4=24$

37. 1; छूट के बाद कुल योग $=3115-(25+28+52)$
$=$ ₹ 3010

उनके घटित शेयर का अनुपात $=8:15:20$

$\therefore$ A का घटित हिस्सा $=\frac{8}{43}\times 3010$

$=8\times 70=$ ₹ 560

B का घटित हिस्सा $=\frac{15}{43}\times 3010$

$=15\times 70=$ ₹ 1050

C का घटित हिस्सा $=\frac{20}{43}\times 3010$

$=20\times 70=$ ₹ 1400

$\therefore$ A का हिस्सा $=560+25=$ ₹ 585
B का हिस्सा $=1050+28=$ ₹ 1078
C का हिस्सा $=1400+52=$ ₹ 1452

38. 2; माना की संख्या में 'a' जोड़ा गया।

प्रश्नानुसार,

$$\frac{3+a}{4+a}=\frac{4}{5}$$

$15+5a=16+4a$
$a=1$

38. 2; पैरामाउंट विधि:-

3 : 4
4 : 5

$$\therefore \text{संख्या}=\frac{4\times 4-3\times 5}{5-4}=\frac{1}{1}=1$$

Scanned by CamScanner

39. 3; माना की संख्या 'a' घटाते हैं।

प्रश्नानुसार,

$$\frac{19 - a}{23 - a} = \frac{3}{4}$$

$$76 - 4a = 69 - 3a$$

$$a = 7$$

39. 3; पैरामाउंट विधिः-

19 : 23

3 : 4

$$\therefore \text{संख्या} = \frac{19 \times 4 - 23 \times 3}{4 - 3} = \frac{7}{1} = 7$$

40.3; 9 : 8

14 : 15

∴ हम जानते हैं कुल भुगतान = प्रत्येक व्यक्ति की मजदूरी × मजदूरों की संख्या

इसलिए, भुगतान में बदलाव का अनुपात

यहाँ अनुपात में कमी है।

= 9 × 14 : 8 × 15

= 126 : 120

= 21 : 20

यहाँ अनुपात कमी दिखा रहा है।

41. 4; माना की A और B की आय क्रमशः $8x$ और ₹ $9x$ है।

अब, परिवर्तन के बाद उनकी आय

$$\text{A की आय} = \frac{150}{100} \times 8x = ₹\, 12x$$

$$\text{B की आय} = \frac{75}{100} \times 9x = ₹\, \frac{27x}{4}$$

स्पष्टतः हमें दोनों की आय को जोड़ने पर अपेक्षित परिणाम मिलेगा।

42.4; माना की मिश्रण में दूध और पानी की मात्रा क्रमशः $4x$ और $3x$ लीटर है।

$$\because \frac{4x}{3x+6} = \frac{8}{7}$$

$$\Rightarrow 28x = 24x + 48$$

$$\Rightarrow 28x - 24x = 48$$

$$\Rightarrow 4x = 48$$

∴ दूध की मात्रा = 48 लीटर

43.2; A : B = 2 × 2 : 3 × 2

B : C = 2 × 3 : 3 × 3

A : B : C = 4 × 2 : 6 × 2 : 9 × 2

C : D = 2 × 9 : 3 × 9

A : B : C : D = 8 : 12 : 18 : 27

$$\text{A का हिस्सा} = \frac{8}{65} \times 1300 = 160/-$$

44.1; पैरामाउंट विधिः-

कुत्ता		खरगोश
6	↗	7
5	↘	6
36	:	35

45.1; $\frac{6-x}{7-x} < \frac{16}{21}$

यदि $x = 3$ है, तो = .75

$$\frac{16}{21} = .76$$

.75 < .76

इसलिए सबसे छोटी संख्या 3. है।

46. 2; अनुपात = $\frac{11x}{12x}$

$$11x \times 12x = 4752$$

$$x^2 = \frac{4752}{11 \times 12} = 36$$

$$x = \sqrt{36} = 6$$

छोटी संख्या = $11x$ = 11 × 6 = 66

Scanned by CamScanner