लघूत्तम समापवर्त्य एवं महत्तम समापवर्तक

लघूत्तम समापवर्त्य (LCM) लघूत्तम समापवर्त्य (LCM) वह छोटी से छोटी (न्यूनतम) संख्या होती है जो दी गयी दो या दो से अधिक संख्याओं से विभाजित होती है।

लघूत्तम समापवर्तक ज्ञात करने की विधि-

- (i) सबसे पहले दिए हुए व्यंजकों के छोटे-छोटे गुणनखंड ज्ञात कर लो।
- (ii) अब, पहले व्यंजक के सभी गुणनखंड ले कर दूसरे व्यंजक के गुणनखंडों में से केवल ऐसे गुणनखंड ले जो पहले व्यंजक के गुणनखंडों में न हो फिर तीसरे व्यंजक के गुणनखंडों में से ऐसे गुणनखंड लो जो पहले अथवा दूसरे व्यंजक के गुणनखंडों में न हो।
- (iii) इस प्रकार प्राप्त सभी गुणनखंडों को गुणा के रूप में रख दो। यही अभीष्ट लघूत्तम समापवर्तक होगा।

जैसे- 6 व 8 का लघूत्तम समापवर्त्य 24 होगा, क्योंकि यह 6 व 8 से एक साथ पूर्णतः विभाजित होने वाली संख्याओं में न्यूनतम है।

महत्तम समापवर्तक (HCF):

महत्तम समापवर्तक (HCF) वह बड़ी से बड़ी (अधिकतम) संख्या होती है जो दी गयी दो या दो से अधिक संख्याओं को पूर्णतः विभाजित करती है।

महत्तम समापवर्तक ज्ञात करने की विधि-

- (i) सबसे पहले दिए हुए व्यंजकों के, उनके गुणांकों सहित छोटे-छोटे गुणनखंड कर लो।
- (ii) व्यंजकों के गुणनखंडों में जो गुणनखंड सर्वनिष्ठ (Common) हो, उसे एकत्रित कर लो।
- (iii) सर्वनिष्ठ गुणनखंड ही अभीष्ट महत्तम समापवर्त्य है। यदि सर्वनिष्ठ एक से अधिक है तो उन्हें गुणा के रूप में रख दो।

जैसे- 24 व 36 को पूर्णतः विभाजित करने वाली संख्याओं में अधिकतम संख्या 12 है। अतः इन संख्याओं का महत्तम समापवर्तक 12 है।

गुणक और गुणज (Multiple):

यदि एक संख्या 'x' दूसरी संख्या 'y' को पूर्णतः विभाजित करती है तो हम 'x' को 'y' का गुणक कहते हैं। इस अवस्था में 'y', 'x' का गुणज कहलाता है।

जैसे- 4 का गुणज 4, 8, 12, 16, 20.....

गुणनखण्ड (Factor):

जब कोई संख्या किसी दूसरी संख्या को पूरा-पूरा विभाजित करे और शेष कुछ न बचे तो वह संख्या उस दूसरी संख्या का गुणनखण्ड कहलाती है।

जैसे- 45 का गुणनखंड 1, 3, 5, 9, 15, 45

सूत्र, व्यंजकों का गुणनफल = महत्तम समापवर्त्य × लघूत्तम समापवर्तक

विधि:-

1. अभाज्य गुणखण्ड विधि

उदाहरण: 144, 180 और 108 का महत्तम समापवर्तक इस विधि द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं –

$$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

उपरोक्त तीनों संख्याओं के अभाज्य गुणखण्डों में उभयनिष्ठ गुणखण्ड

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36 \text{ है।}$$

∴ 144, 180 और 108 का अभीष्ट महत्तम समापवर्तक 36 होगा।

2. भाग विधि

उदाहरण: उपरोक्त संख्याओं का महत्तम समापवर्तक भाग विधि द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं –

$$\begin{array}{r} 144 \overline{) 180} \quad (1 \\ \underline{144} \\ 36 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 36 \overline{) 144} \quad (4 \\ \underline{144} \\ \times \times \times \end{array}$$

अब 36 और 108 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करना है।

$$\begin{array}{r} 36 \overline{) 108} \quad (3 \\ \underline{108} \\ \times \times \times \end{array}$$

अतः 144, 180 और 108 का महत्तम समापवर्तक 36 होगा।

कुछ महत्वपूर्ण अभ्यास प्रश्न

1. वह न्यूनतम संख्या कौन सी है जिसमें 18, 24, 30 एवं 42 से भाग देने पर हर हाल में 1 ही शेष बचता हों

"Solution = अभीष्ट संख्या = (18, 24, 30, 42 का ल.स.) + 1

$$= 2520 + 1 = 2521$$

2. 32, 64, 128 का ल.स. है

1) 32 2) 128 3) 64 4) 160

Answer: 2)

$$\text{"Solution} = 32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

$$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$$

$$128 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$$

$$\Rightarrow \text{ल. स.} = 128$$

अतः 128 तीनों दी गयी संख्याओं 32, 64, 128 से पूर्णतया विभाजित है इसलिए 128 ही इनका ल. स. होगा।

3. वह सबसे छोटी संख्या बतायें जिसमें 52, 78 एवं 117 से भाग देने पर क्रमशः 33, 59 एवं 98 शेष बचता हो

"Solution = चूंकि $52-33=19$, $78-59=19$, $117-98=19$

अभीष्ट संख्या = $(52,78,117 \text{ का ल.स.}) - 19$

$= 468-19 = 449$

4. $2/3$, $3/4$, $5/8$ का ल.स. क्या होगा ?

1) 80 2) 24 3) 30 4) 72

Answer: 3)

"Solution = $2/3$, $3/4$, $5/8$ का ल. स. = अंशों 2, 3, 5 का ल. स./ हरों 3, 4, 8 का म. स.

अंशों 2, 3, 5 का ल. स. = 30,

हरों 3, 4, 8 का म. स. = 1

$\Rightarrow 2/3, 3/4, 5/8$ का ल. स. = $30/1 = 30$

5. छः अंकों की वह सबसे बड़ी संख्या बतायें जिससे 6, 7, 8, 9 एवं 10 से भाग देने पर शेष क्रमशः 4, 5, 6, 7 एवं 8 शेष बचता है

"Solution = (चूंकि $(6-4)=2$, $(7-5)=2$, $(8-6)=2$, $(9-7)=2$, $(10-8)=2$

$6,7,8,9$ एवं 10 का ल.सं = 2520

छ अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 999999

999999 को 2520 से भाग देने पर शेष बचता है 2079

$999999-2079 = 997920$

इसिलिये अभीष्ट संख्या = $997920-2 = 997918$

6. दो संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य 48 है। यदि वे संख्यायें 2:3 के अनुपात में हो, तो उनका योग कितना होगा?

1) 28 2) 32 3) 40 4) 64

Answer: 3)

"Solution = माना संख्यायें $2x$ तथा $3x$ है |

तो ल. स. = $6x$

प्रश्नानुसार, $6x = 48 \Rightarrow x = 8$

$\therefore$ संख्यायें = $2x = 2 \times 8 = 16$,

$3x = 3 \times 8 = 24$

$\therefore$ अभीष्ट योग = $16 + 24 = 40$

अतः संख्याओं का योग = 40 होगा |

7. दो संख्याओं 5:6 के अनुपात में है यदि उनका ल0 स0 120 हो, तो उनका म0 स0 होगा

"Solution = माना कि संख्याओं का म0 स0 a है अतः संख्याएं होंगी $5a$ तथा $6a$

अतः $5a \times 6a = 120 \times a$

$30a = 120$

उत्तर: $a = 4$

8. $2 \times 3 \times 7 \times 9$, $2 \times 3 \times 9 \times 11$, और $2 \times 3 \times 4 \times 5$ का म. स. क्या होगा ?

- 1) $2 \times 3 \times 7$ 2) $2 \times 3 \times 9$
3) 2×3 4) $2 \times 7 \times 9 \times 11$

Answer: 3)

"Solution = $2 \times 3 \times 7 \times 9$, $2 \times 3 \times 9 \times 11$, और $2 \times 3 \times 4 \times 5$ का म. स. = 2×3

सभी संख्याओं में से उभयनिष्ठ गुणनखंडों का गुणनफल ही अभीष्ट म. स. होगा। अतः अभीष्ट म. स. 6 होगा।

9. दो संख्याओं का महत्तम समापवर्तक 12 तथा लघुत्तम समापवर्त्य 600 है। यदि इनमें से एक संख्या 24 हो तो दोनों संख्याओं का औसत क्या होगा?

- 1) 786 2) 453 3) 189 4) 162

Answer: 4)

"Solution = दूसरी संख्या = $600 \times 12 / 24 = 300$ अभीष्ट औसत = $300 + 24 / 2 = 324 / 2 = 162$

10. $2/3$, $3/5$, $4/7$, $9/13$ का ल.स. क्या होगा?

- 1) 36 2) $1/36$ 3) $1/1365$ 4) $12/455$

Answer: 1)

"Solution = 2, 3, 4, 9 का ल. स. = $4 \times 9 = 36$ तथा

3, 5, 7, 13 का म. स. = 1

$2/3, 3/5, 4/7, 9/13$ का ल. स. = $2, 3, 4, 9$ का ल.स. / 3, 5, 7, 13 का म.स. = $4 \times 9 / 1 = 36$

11. तीन घंटियां क्रमशः 18 से., 24 से. एवं 30 से. के अंतराल पर बजती हैं, 9 बजे सुबह एक साथ बजना आरंभ किया, दोपहर 1 बजे तक कुल कितनी बार एक साथ बजेगी ?

- 1) 88 2) 41 3) 90 4) 34

Answer: 2)

"Solution = 360 से. = $360 / 60 = 6$ मिनट repetition की संख्या = $4 \times 60 / 6 = 40 + 1 = 41$ कुल repetition की संख्या = $40 + 1 = 41$

व्याख्या:

18, 24 एवं 30 का ल.स = 360 ($18 \times 20, 24 \times 15, 30 \times 12$)

360 सेकंड या 6 मिनट में

घंटी 1 = 20 बार, घंटी 2 = 15 बार, घंटी 3 = 12 बार बजती है

घंटी 3 = 12 बार बजती है 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 330, 360 सेकंड पर

इसी अंतराल पर

घंटी 1 = 20 बार बजती है एक साथ बजती है 4 बार 90, 180, 270, 360

घंटी 2 = 15 बार बजती है एक साथ बजती है 3 बार 120, 240, 360 तीनों घंटियां एक साथ बजती है

360 सेकंड के अंतराल पर

अर्थात् सभी घंटियां 6 मिनट बाद में 1 बार एक साथ बजती है, 1 घंटे में 10 बार व 4 घंटे में 40 बार + 1 बार आरंभ = $40+1 = 41$ बार

12. दो संख्याओं का म.स. 12 है और उनका अन्तर भी 12 है । वे संख्यायें क्या हैं?

- 1) 66, 78 2) 70, 82 3) 94, 106 4) 84, 96

Answer: 4)

"Solution = विकल्प (d) से , $84 = 12 \times 7$, $96 = 12 \times 8$

$\therefore$ 84 तथा 96 का महत्तम समापवर्तक = 12

तथा अन्तर = $96 - 84 = 12$

अतः संख्याओं 84 तथा 96 द्वारा प्रश्न में दी गयी स्थितियां संतुष्ट होती है। अतः अभीष्ट संख्यायें 84 तथा 96 हैं ।

अतः विकल्प (d) सत्य है ।

13. दो संख्याओं का योगफल उसके मका .प.स. 15 गुना है तो ऐसे दो संख्याओं के कितने संभावित जोड़े हो सकते हैं ।

- 1) 5 2) 8 3) 4 4) 2

Answer: 3)

"Solution = दो संख्याओं से बनने वाले जोड़े 1-14, 2-13, 3-12, 4-11, 5-10, 6-9 व 7-8

इन सभी जोड़ों का योगफल 15 है अतः म.स.प 1 होगा, इनमें से 3-12, 5-10, 6-9 का म.स.प 1 नहीं हो सकता अतः

दो संख्याओं से बनने वाले संभावित जोड़े $= (1,14)(2,13)(4,11)(7,8) = 4$

14. दो संख्याओं का अनुपात 3 : 4 है । तथा उनका म.स. 5 है ! तदनुसार , उनका ल. स. कितना होगा ?

- 1) 10 2) 60 3) 15 4) 12

Answer: 2)

"Solution = माना संख्यायें $3x$ तथा $4x$ है ।

$\therefore$ म.स. = 5 (दिया है)

तब , संख्यायें = $3x = 3 \times 5 = 15$, $4x = 4 \times 5 = 20$,

$$\Rightarrow 15 = 3 \times 5$$

$$\Rightarrow 20 = 2 \times 2 \times 5$$

$$\text{ल. स.} = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$\therefore \text{ल. स.} = 60$$

15. वह छोटी से छोटी संख्या जिसे 4, 6, 8, 12 और 16 से भाग करने पर हर दशा में शेष 2 रहे, निम्न है?

- 1) 67 2) 12 3) 65 4) 50

Answer: 4)

"Solution = 4, 6, 8, 12, 16 का ल.स. = 48 अभीष्ट संख्या = ल.स. + शेष = 48 + 2 = 50

16. दो संख्याओं का म.स. 7 है। तदानुसार, निम्न में से कौन सी संख्या उन संख्याओं का ल.स. हो सकती है?

- 1) 24 2) 48 3) 56 4) 60

Answer: 3)

"Solution = किन्हीं संख्याओं का ल.स. उनके म.स. से भाज्य होता है। अर्थात् म.स. किन्हीं दो या दो से अधिक दी गयी संख्याओं का उभयनिष्ठ पद होता है। इसलिए दिए गए विकल्पों में केवल संख्या 56, 7 से भाज्य है। अतः इन संख्याओं का ल.स. 56 हो सकता है।

∴ विकल्प (c) सत्य है।

17. दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल 1500 है एवं उनका महत्तम समापवर्तक 10 है, तो उनका लघुत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

- 1) 15000 2) 150 3) 1500 4) 15

Answer: 2)

"Solution = दिया है, दो संख्याओं का गुणनफल = 1500, तथा महत्तम समापवर्तक = 10

तथा हम जानते हैं कि, दो संख्याओं का गुणनफल = ल.स. × म.स. (सूत्र से)

(या) पहली संख्या × दूसरी संख्या = ल.स. × म.स.

लघुत्तम समापवर्तक = $1500 / 10 = 150$

∴ लघुत्तम समापवर्तक = 150

अतः संख्याओं का ल.स. 150 होगा।

Q1। दो संख्याओं का LCM 1920 है और उनकी HCF 16 है। यदि संख्याओं में से एक संख्या 128 है, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

- (a) 204
- (b) 240
- (c) 260
- (d) 320

Q2। दो संख्याओं के एचसीएफ और उत्पाद क्रमशः 15 और 6300 हैं। संख्या के संभावित जोड़े की संख्या है:

- (a) 4
- (b) 3
- (c) 2
- (d) 1

Q3। दो संख्याओं का LCM उनके HCF से 4 गुना है। LCM और HCF का योग 125 है। यदि संख्याओं में से एक 100 है, तो दूसरी संख्या है:

- (a) 5
- (b) 25
- (c) 100
- (d) 125

Q4। दो संख्याओं के एचसीएफ और एलसीएम क्रमशः 13 और 455 हैं। यदि कोई संख्या 75 और 125 के बीच है, तो वह संख्या है:

- (a) 78
- (b) 91
- (c) 104
- (d) 117

Q 5। सबसे कम संख्या, जिसे 12, 15, 20 या 54 से विभाजित करने पर प्रत्येक मामले में 4 शेष रह जाता है:

- (a) 450 रु
- (b) 454
- (c) 540
- (d) 544

Q6। पांच अंकों की सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए, जिसे 3, 5, 8, 12 से विभाजित करने पर 2 शेष बचे हैं:

- (a) 99999
- (b) 99958

- (c) 99960
- (d) 99962

Q.7। कम से कम संख्या जिसे 16, 18, 20 और 25 से विभाजित किया जाता है 4 प्रत्येक मामले में शेष के रूप में 4 होता है लेकिन जब 7 पत्तों से विभाजित किया जाता है तो शेष नहीं:

- (a) 17004
- (b) 18000 रु
- (c) 18002
- (d) 18004

Q.8। सबसे कम संख्या कौन सी है जिसे जब संख्या 3, 5, 6, 8, 10 और 12 से विभाजित किया जाता है तो प्रत्येक मामले में शेष 2 लेकिन 13 से विभाजित होने पर शेष नहीं रह जाता है?

- (a) 312
- (b) 962
- (c) 1562
- (d) 1586

Q. 9। तीन अलग-अलग सड़क क्रॉसिंग पर ट्रैफिक लाइट क्रमशः 24 सेकंड, 36 सेकंड और 54 सेकंड के बाद बदल जाती है। यदि वे सभी 10:15:00 पूर्वाह्न पर एक साथ बदलते हैं, तो वे किस समय फिर से एक साथ बदलेंगे?

- (a) 10:16:54 AM
- (b) 10:18:36 AM
- (c) 10:17:02 पूर्वाह्न
- (d) 10:22:12 पूर्वाह्न

प्रश्न 10। 5 किमी लंबे ए सर्कुलर ट्रैक पर एक बिंदु से, बी और सी एक ही दिशा में क्रमशः 2 (1/2) किमी प्रति घंटे, 3 किमी प्रति घंटे और 2 किमी प्रति घंटे की गति के साथ एक ही दिशा में चलने लगे। फिर शुरुआती बिंदु पर, तीनों फिर से मिलेंगे:

- (a) 30 घंटे
- (b) 6 घंटे
- (c) 10 घंटे
- (d) 15 घंटे

प्रश्न 11। बता दें कि N सबसे बड़ी संख्या है जो प्रत्येक मामले में 1305, 4665 और 6905 को शेष बचेगी। फिर, N में अंकों का योग है:

- (a) 4
- (b) 5
- (c) 6
- (d) 8

प्रश्न 12। अंग्रेजी, गणित और विज्ञान की पुस्तकों के तीन सेटों में क्रमशः 336, 240, 96 पुस्तकों को इस तरह से स्टैक किया जाना है कि सभी पुस्तकें विषयवार संग्रहित हों और प्रत्येक स्टैक की ऊंचाई समान हो। ढेर की कुल संख्या होगी:

- (a) 14
- (b) 21
- (c) 22
- (d) 48

प्रश्न 13। तीन संख्याएँ 2: 3: 4 के अनुपात में हैं और उनका एच.सी.एफ. है 12. एल.सी.एम. संख्याओं में से है:

- (a) 144
- (b) 192
- (c) 96
- (d) 72

प्रश्न 14। H.C.F और L.C.M. दो संख्याएँ क्रमशः 21 और 48 हैं। यदि दो संख्याओं का अनुपात 1: 4 है, तो दो संख्याओं में से बड़ा है:

- (a) 12
- (b) 108
- (c) 48
- (d) 84

Q. 15। 3000 और 4000 के बीच की संख्या जो कि 30, 36 और 80 से बिल्कुल विभाज्य है:

- (a) 3625
- (b) 3250
- (c) 3500
- (d) 3600 रु

समाधान

S2। उत्तर (सी)

सोल। बता दें कि नंबर $15x$ और $15y$ हैं

तो, $15x \times 15y = 6300$

$x \times y = 28$

संभावित जोड़े = (1, 28) 1

$$= (2, 14) \times \\ = (4, 7))$$

दो संभव जोड़े।

S5। Ans। (D)

सोल। 15, 12, 20, 54 = 540 का एलसीएम

फिर संख्या = 540 + 4 = 544

[4 शेष रहा]

S6। Ans। (D)

सोल। पांच अंकों की सबसे बड़ी संख्या 99999 है।

3, 5, 8 और 12 = 120 का एलसीएम

99999 को 120 से विभाजित करने के बाद, हम शेष के रूप में 39 प्राप्त करते हैं

$99999 - 39 = 99960$

दिए गए भाजक द्वारा 99960 सबसे बड़ी पांच अंकों की संख्या है।

प्रत्येक मामले में शेष के रूप में 2 पाने के लिए, हम बस 2 से 99960 जोड़ेंगे।

∴ सबसे बड़ी संख्या = $99960 + 2 = 99962$

S7। Ans। (D)

सोल। 16, 18, 20 और 25 = 3600 का एलसीएम

∴ आवश्यक संख्या = $3600K + 4$ जो K के निश्चित मूल्य के लिए 7 से बिल्कुल विभाज्य है।

जब $K = 5$,

संख्या = $3600 \times 5 + 4$

= 18004 जो 7 से बिल्कुल विभाज्य है।

S8। उत्तर (बी)

सोल। 3, 5, 6, 8, 10 और 12 = 120 का एलसीएम

Number आवश्यक संख्या

= $120x + 2$, जो 13 से बिल्कुल विभाज्य है।

$120x + 2 = 13 \times 9x + 3x + 2$

स्पष्ट रूप से $3x + 2$ को 13 से विभाज्य होना चाहिए।

$X = 8$ के लिए, $3x + 2$ 13 से विभाज्य है।

= आवश्यक संख्या = $120x + 2 = 120 \times 8 + 2$

= $960 + 2 = 962$

S9। उत्तर (बी)

सोल। 24, 36 और 54 सेकंड का एलसीएम

= 216 सेकंड

= 3 मिनट 36 सेकंड

Seconds आवश्यक समय = 10:15:00 + 3 मिनट 36 सेकंड

= 10:18:36 बजे।

S11। उत्तर। (ए)

सोल। सबसे बड़ी संख्या $N = \text{HCF}$ ऑफ़ $(1305 - x)$, $(4665 - x)$ और $(6905 - x)$, जहाँ x शेष है
 $=$ का HCF $(4665 - 1305)$, $(6905 - 4665)$ और $(6905 - 1305)$

$= 3360, 2240$ और 5600 का एच.सी.एफ.

$20 \text{ एन} = 1120$

अंकों का योग $= 1 + 1 + 2 + 0 = 4$

S13। उत्तर। (ए)

सोल। संख्याओं को क्रमशः $2x$, $3x$ और $4x$ होने दें।

X एचसीएफ $=$ एक्स $= 12$

$\therefore$ संख्याएं हैं: $2 \times 12 = 24$, $3 \times 12 = 36$, $4 \times 12 = 48$

$24, 36, 48$ का एलसीएम

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 144$

S14। Ans। (D)

सोल। संख्याओं का $\text{HCF} = 21$

$\therefore$ संख्या $= 21x$ और $21y$

जहां x और y एक-दूसरे के लिए प्रमुख हैं।

संख्या $= 1: 4$ का अनुपात

$=$ बड़ी संख्या $= 21 \times 4 = 84$

S15। Ans। (D)

सोल। सबसे पहले, हम $30, 36$ और $80 = 720$ का एलसीएम पाते हैं

।red आवश्यक संख्या $= 720$ से अधिक

$= 720 \times 5 = 3600$

क्योंकि $3000 < 3600 < 4000$